目　　录

第一章　广义函数与Sobolev空间

§1　广义函数的概念、基本空间

当我们不再局限于连续函数类中讨论偏微分方程时，首先遇到的问题是怎样把函数的概念以及方程解的概念拓广。为此，在本节中引入广义函数的概念，它的严格的数学基础是L. Schwartz等人在本世纪四十年代末奠定的。

Schwartz的广义函数又称为分布，它是作为泛函引入的。为了说明广义函数的概念，我们先考察 $(a,b)\subset R^1$ 上的函数。设

$$f(x)\in L^2(a,b),$$

则它以下列方式定义了 $L^2(a,b)$ 上的一个线性连续泛函：

$$F(\varphi)=\int_a^b f(x)\varphi(x)dx,\qquad \forall\varphi(x)\in L^2(a,b)。\qquad (1.1)$$

反之，根据泛函分析的知识知道，对于 $L^2(a,b)$ 中的任意一个线性连续泛函，都有唯一的函数 $f(x)\in L^2(a,b)$ 与之对应，并能将此泛函表现为(1.1)的形式。因此，在(1.1)的泛函表现形式下，L^2 函数与 $L^2(a,b)$ 空间上的泛函可以看成是一样的。

但如果考察 $L^p(a,b)(p>2)$，情况就不同了。那时根据泛函分析知道，$L^q(a,b)$ 中的函数均可按(1.1)形式定义一个 $L^p(a,b)$ 上的线性连续泛函，而 $L^p(a,b)$ 上的线性连续泛函也必定可表示为 $L^q(a,b)$ 中的函数$\left(此处\ q\ 满足\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1\right)$。若 $p>2$，则必有 $q<2<p$，于是 $L^p(a,b)$ 上的泛函要比原空间的函数类更广。如果我们只将 $L^p(a,b)$ 的元素称为“函数”，那末，通过构造线性连续泛函，就可以得到一些“广义的函数”。

如果考察性质更好的函数空间，例如考察 $[a,b]$ 上的连续函数空间 $C[a,b]$，这时，$L^1(a,b)$ 中任一函数，仍可按(1.1)定义一个 $C[a,b]$上的线性连续泛函；但反过来，$C[a,b]$ 上的线性连续泛函却不一定可以用常义函数 $f\in L^1(a,b)$ 表为(1.1)的形式。例如，若 $0\in(a,b)$，定义泛函 F 为

$$F(\varphi)=\varphi(0),\qquad \forall\varphi\in C[a,b], \tag{1.2}$$

则它是一个线性连续泛函。事实上，若有 $\varphi_\nu(x)\in C[a,b]$，满足

$$\|\varphi_\nu(x)\|_{C[a,b]}=\max_{x\in[a,b]}|\varphi_\nu(x)|\to 0,$$

则 $F(\varphi_\nu)=\varphi_\nu(0)\to 0$，所以 $F(\varphi)$ 关于 φ 是连续的。但是，却找不到一个通常的可积函数 $f(x)$，使

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\varphi(0),\qquad \forall\varphi(x)\in C[a,b], \tag{1.3}$$

我们用反证法来证明(1.3)不可能成立。事实上，假若有这样的函数 $f(x)$存在，任取 c,d,ε 满足 $0<c<d<b,\ \varepsilon<\min(c,b-d)$，则对于$[c,d]$上的任一连续函数 $\psi(x)$，作

$$\psi_\varepsilon(x)=\begin{cases}\psi(x) & x\in[c,d]\\ \dfrac{x-c+\varepsilon}{\varepsilon}\psi(c) & x\in[c-\varepsilon,c)\\ \dfrac{\varepsilon-x+d}{\varepsilon}\psi(d) & x\in(d,d+\varepsilon]\\ 0 & \text{其他},\end{cases}$$

则我们有 $\psi_\varepsilon(x)\in C[a,b],\psi_\varepsilon(0)=0$，且

$$\left|\int_a^b f(x)\psi_\varepsilon(x)dx-\int_c^d f(x)\psi(x)dx\right|$$

$$\leqslant\left(\int_{c-\varepsilon}^{c}+\int_d^{d+\varepsilon}\right)|f(x)\psi_\varepsilon(x)|dx$$

$$\leqslant\max(|\psi(c)|,|\psi(d)|)\left(\int_{c-\varepsilon}^{c}+\int_d^{d+\varepsilon}\right)|f(x)|dx。$$

因$\int_a^b f(x)\psi_\varepsilon(x)dx=\psi_\varepsilon(0)=0$，所以

$$\left|\int_c^d f(x)\psi(x)dx\right|\leqslant\max\{|\psi(c)|,|\psi(d)|\}$$

$$\cdot\left(\int_{c-\varepsilon}^{c}+\int_d^{d+\varepsilon}\right)|f(x)|dx,$$

根据积分的绝对连续性知右端在$\varepsilon\to0$时为零，而左端与ε无关，故

$$\int_c^d f(x)\psi(x)dx=0。$$

因此，$f(x)$在$[c,d]$中为零。由c,d的任意性知，$f(x)$在$(0,b)$中为零，同理它在$(a,0)$中为零。又由于原点一点仅具有零测度，故又可得

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=0$$

对一切$\varphi(x)\in C[a,b]$成立。但对(1.3)而言这是不可能的。这个矛盾就说明泛函(1.2)无法用常义的可积函数表示。

(1.2)式所表达的泛函是"广义函数"的一个典型例子，它称为δ函数，关于它的性质以后会作较多的介绍。通常，对于一个给定的函数空间（例如$C[a,b]$），可以由常义函数通过(1.1)决定该函数空间上的一个线性连续泛函。从而可以将常义函数视为线性连续泛函，但一般来说，线性连续泛函全体往往可能包含更多的元素。我们今后将规定一些特定的函数空间为**基本空间**，而把定义在基本空间上的线性连续泛函称为**广义函数**。显然，广义函数的性质与它所作用的函数空间的性质是密切相关的。

最常用的基本空间是$C_0^\infty(\Omega)$。为给出其定义，先引入支集的概念。

定义 1.1.1 设Ω是R^n中给定的开集，$\varphi(x)\in C^0(\Omega)$，则称使$\varphi(x)$不等于零的点集的闭包为$\varphi(x)$的**支集**，并记为$\mathrm{supp}\varphi$，

即

$$\mathrm{supp}\varphi=\overline{\{x;\varphi(x)\neq 0\}}。\qquad (1.4)$$

定义 1.1.2 如果$\varphi(x)\in C^\infty(\Omega)$，且$\mathrm{supp}\varphi$是$\Omega$中的紧集，则称$\varphi(x)$为$C_c^\infty(\Omega)$函数。所有这种函数全体构成**$C_c^\infty(\Omega)$空间**。

例 1 设Ω包含以原点为球心的单位闭球$\overline{B_1(O)}$，定义

$$\alpha(x)=\begin{cases}C\exp(|x|^2-1)^{-1} & |x|<1,\\ 0 & |x|\geqslant 1,\end{cases}\qquad (1.5)$$

则$\alpha(x)$是$C_c^\infty(\Omega)$函数。

在(1.5)中的C是常数，习惯上将它取成使

$$\int_\Omega \alpha(x)dx=1。$$

易见，$\alpha(x)$的支集是$\overline{B_1(O)}$。

例 2 设$\alpha(x)$如(1.5)式所示，令

$$\alpha_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

则仍有

$$\alpha_\varepsilon(x)\in C_c^\infty(\Omega),$$

$$\int_\Omega \alpha_\varepsilon(x)dx=1,$$

且$\mathrm{supp}\alpha_\varepsilon=\overline{B_\varepsilon(O)}$，即以原点为球心，以$\varepsilon$为半径的闭球。

例 3 设$f(x)$是定义于Ω上的连续函数，$\mathrm{supp}f\subset\Omega$，记$\delta=\mathrm{dist}(\mathrm{supp}f,\ \partial\Omega)$，$\varepsilon=\dfrac{\delta}{2}$，则若定义

$$f_\varepsilon(x)=\int_\Omega f(x-y)\alpha_\varepsilon(y)dy=\int_\Omega \alpha_\varepsilon(x-y)f(y)dy,\qquad (1.6)$$

必有$f_\varepsilon(x)\in C_c^\infty(\Omega)$。函数$f_\varepsilon$也常被记为$J_\varepsilon f$。

定理 1.1.1 对于任一紧集$K\subset\Omega$，必可找到一个$C_c^\infty(\Omega)$函数，使它在K上恒等于1。

证明 作开集 Ω_1，使 $K\subset\Omega_1$，$\bar{\Omega}_1\subset\Omega$，记 $\chi(x)$ 为 Ω_1 的特征函数，令 $\varepsilon=\frac{1}{3}\min(\text{dist}(K,\partial\Omega_1),\text{dist}(\Omega_1,\partial\Omega))$，仿例 3 定义

$$\chi_\varepsilon(x)=\int_\Omega\alpha_\varepsilon(x-y)\chi(y)dy, \tag{1.7}$$

则易证 $\chi_\varepsilon(x)\in C_c^\infty(\Omega)$，且在 K 上恒等于 1。

证毕

定理 1.1.1 中的 $\chi_\varepsilon(x)$ 称为截断函数，它在后面将经常用到。

空间 $C_c^\infty(\Omega)$ 中极限关系的定义如下。

定义 1.1.3 若 $\{\varphi_\nu\}$ 是 $C_c^\infty(\Omega)$ 函数列，满足下列条件

1） $\text{supp}\varphi_\nu$ 含于一个共同的紧集 $K\subset\Omega$ 内。

2） 对任何重指标 α，在上述紧集内

$$\sup_K|\partial^\alpha\varphi_\nu|\to 0, \tag{1.8}$$

则称 $\varphi_\nu\to 0(C_c^\infty(\Omega))$。

例 4 若 $\Omega=R^n$，$\alpha(x)$ 为按(1.5)定义的函数，作函数列

$$\psi_j(x)=\alpha(x-j),$$

则在任一紧集 $K\subset R^n$ 上，$\{\psi_j\}$ 及其各阶导数一致趋于零，但按 $C_c^\infty(\Omega)$ 的极限关系不能说 ψ_j 趋于 0。

定理 1.1.2 设 $u(x)$ 是 R^n 中的局部可积函数，按 (1.6) 式定义 $u_\varepsilon=J_\varepsilon u$。当 $\varepsilon\to 0$ 时：若 $u(x)\in C^0(R^n)$，则对于任一紧集 $K\subset R^n$，u_ε 在 K 上一致收敛于 u；若 $u(x)\in C_c^\infty(R^n)$，则

$$u_\varepsilon\to u(C_c^\infty(R^n));$$

若 $u\in L^p(R^n)$，则

$$u_\varepsilon\to u(L^p(R^n))。$$

证明 1） 若 $u(x)\in C^0(R^n)$，利用

$$\int_{R^n}\alpha_\varepsilon(y)dy=1$$

可得

$$u_\varepsilon(x)-u(x)=\int_{R^n}(u(x-y)-u(x))\alpha_\varepsilon(y)dy,$$

当 x 属于某紧集 K 时，由于 $\alpha_\varepsilon(y)$ 的支集在球 $|y|\leqslant\varepsilon$ 中，故上式积分号下作为函数 u 的变元的 x 与 $x-y$ 落在紧集 K_1 中，这里 K_1 是把以 K 中任意点为球心，1为半径的球都包含在里面的一个紧集。利用 $u(x)$ 在紧集 K_1 上的一致连续性可知，对任意 $\delta>0$，在 ε 充分小时有

$$\begin{aligned}\max_{x\in K}|u_\varepsilon(x)-u(x)|&\leqslant\int_{R^n}|u(x-y)-u(x)|\alpha_\varepsilon(y)dy\\&\leqslant\max_{\substack{x,x-y\in K_1\\|y|\leqslant\varepsilon}}|u(x-y)-u(x)|\int_{R^n}\alpha_\varepsilon(y)dy\\&\leqslant\delta\int_{R^n}\alpha_\varepsilon(y)dy=\delta.\end{aligned}$$

所以，当 $\varepsilon\to0$ 时，在 K 上 $u_\varepsilon(x)$ 一致收敛于 $u(x)$。

2） 如果 $u(x)\in C_c^\infty(R^n)$，记 $\operatorname{supp}u=K$，则当 $\varepsilon<1$ 时，$\operatorname{supp}u_\varepsilon\subset K_1$，此外，由1)中的证明知，在 K 上 $u_\varepsilon(x)$ 一致收敛于 $u(x)$，又对任意重指标 β，由

$$\begin{aligned}(\partial^\beta u_\varepsilon)(x)&=\partial^\beta\int_{R^n}u(x-y)\alpha_\varepsilon(y)dy\\&=\int_{R^n}(\partial_x^\beta u)(x-y)\alpha_\varepsilon(y)dy\end{aligned}$$

可知，在 K 上 $\partial^\beta u_\varepsilon$ 一致收敛于 $\partial^\beta u$。于是 $u_\varepsilon\to u(C_c^\infty(R^n))$。

3） 如果 $u\in L^p(R^n)$，我们先找一个具有紧支集的连续函数 v，使它满足 $\|u-v\|_{L^p}<\dfrac{\delta}{3}$，利用 L^p 空间的三角不等式，有

$$\|u_\varepsilon-u\|_{L^p}\leqslant\|u_\varepsilon-v_\varepsilon\|_{L^p}+\|v_\varepsilon-v\|_{L^p}+\|u-v\|_{L^p}. \qquad (1.9)$$

由于对任意 L^p 函数 $f(x)$ 成立

$$
\begin{aligned}
\|f_\varepsilon\|_{L^p} &= \left(\int_{R^n} |f_\varepsilon|^p dx\right)^{1/p} \\
&= \left\{\int_{R^n} \left|\int_{R^n} f(x-y)\alpha_\varepsilon(y)dy\right|^p dx\right\}^{1/p} \\
&\leqslant \left\{\int_{R^n}\left(\int_{R^n} |f(x-y)|^p \alpha_\varepsilon(y)dy\right)^{p/p}\right. \\
&\quad \times \left.\left(\int_{R^n}\alpha_\varepsilon(y)dy\right)^{p/q} dx\right\}^{1/p} \\
&= \left\{\int_{R^n}\int_{R^n} |f(x-y)|^p \alpha_\varepsilon(y)dydx\right\}^{1/p} \\
&= \left\{\int_{R^n}\alpha_\varepsilon(y)\int_{R^n} |f(x-y)|^p dxdy\right\}^{1/p} \\
&= \|f\|_{L^p}
\end{aligned}
$$

$\left(\text{其中}\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1\right)$，因此有

$$\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{L^p} \leqslant \|u-v\|_{L^p} < \frac{\delta}{3}。$$

但由于 v 是具有紧支集的连续函数，所以 v_ε 一致收敛于 v，因此当 ε 充分小时，也有

$$\|v_\varepsilon - v\|_{L^p} < \frac{\delta}{3},$$

于是从(1.9)式可得

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L^p} < \delta。$$

这就得到了 $u_\varepsilon \to u(L^p(R^n))$ 的结论。

证毕

注 1.1.1 若定理 1.1.2 中 R^n 改成一般区域 Ω，则相应的结论仍成立。例如，对局部可积函数 $u(x)$，可以构造相应的 $u_\varepsilon(x)$。使当 $\varepsilon\to 0$ 时：若 $u(x)\in C^0(\Omega)$，则在任一紧集 $K\subset\Omega$ 中，$u_\varepsilon(x)$ 一致收敛于 $u(x)$；若 $u(x)\in C_c^\infty(\Omega)$，则成立 $u_\varepsilon\to u(C_c^\infty(\Omega))$；若 $u\in L^p(\Omega)$，则 $u_\varepsilon\to u(L^p(\Omega))$。

先讨论 $u\in C^0(\Omega)$的情形。这时记

$$\Omega_\delta=\{x\in\Omega;\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)>\delta\},$$

对 $\varepsilon>0$，先作一截断函数 $\zeta_\varepsilon(x)\in C_c^\infty(\Omega_{\varepsilon/2})$，且使 $\zeta_\varepsilon(x)$ 在 Ω_ε 上恒等于1。再令 $u_\varepsilon=J_{\varepsilon/4}(\zeta_\varepsilon u)$，即可证得在任一紧集 $K\subset\Omega$ 中 $u_\varepsilon(x)$一致收敛于 $u(x)$。至于后两种情形，只要简单地将 $u(x)$ 在 Ω 外作零延拓，再令 $u_\varepsilon=J_\varepsilon u$，并如定理1.1.2那样论证即可。

我们再介绍两类基本空间，一类是 $C^\infty(\Omega)$，一类是$\mathscr{S}(R^n)$。

$C^\infty(\Omega)$即为Ω上所有无限次可微函数的集合，其中极限关系为：

若$\{\varphi_\nu\}$是 $C^\infty(\Omega)$函数列，且对任一紧集 $K\subset\Omega$，任一重指标 α，成立 $\sup\limits_K|\partial^\alpha\varphi_\nu|\to0$，则称 $\varphi_\nu\to0(C^\infty(\Omega))$。

这个极限关系也可以用一族可列半范数给出。作一列紧集$\{K_i\}$，使 $K_1\subset K_2\subset K_3\subset\cdots$，且

$$\bigcup_{i=1}^\infty K_i=\Omega。$$

定义

$$p_{i,\alpha}(\varphi)=\sup_{K_i}|\partial^\alpha\varphi|,\qquad(1.10)$$

则 $\varphi_\nu\to0(C^\infty(\Omega))$等价于对一切 i,α 成立 $p_{i,\alpha}(\varphi_\nu)\to0$。

定义 1.1.4 若函数 $\varphi\in C^\infty(R^n)$，且对所有正整数 k 以及任意重指标 α，成立

$$\lim_{|x|\to\infty}|(1+|x|^2)^k\partial^\alpha\varphi(x)|=0,\qquad(1.11)$$

则称 φ 是在 R^n 上的**速降函数**，记为 $\varphi\in\mathscr{S}(R^n)$

条件(1.11)等价于对所有正整数 k 以及任意重指标 α，成立

$$\sup_{x\in R^n}|(1+|x|^2)^k\partial^\alpha\varphi(x)|<\infty.$$

在速降函数空间$\mathscr{S}(R^n)$中的极限关系可定义如下：

若$\{\varphi_\nu\}$是$\mathscr{S}(R^n)$中的函数列，若对任意正整数 k 以及任意重

指标 α， $\sup\limits_{x\in R^n}|(1+|x|^2)^k\partial^\alpha\varphi_\nu(x)|\to 0$，则称 $\varphi_\nu\to 0(\mathscr{S}((R^n))$。

这个极限关系也可以用一族半范数

$$p_{k,\alpha}(\varphi)=\sup_{R^n}|(1+|x|^2)^k\partial^\alpha\varphi(x)| \tag{1.12}$$

给出。$\varphi_\nu\to 0$ 就等价于对一切 k，α 成立 $p_{k,\alpha}(\varphi_\nu)\to 0$。

我们有下面的具有连续嵌入的包含关系：

$$C_c^\infty(R^n)\subset\mathscr{S}(R^n)\subset C^\infty(R^n), \tag{1.13}$$

并且 $C_c^\infty(R^n)$ 是 $\mathscr{S}(R^n)$ 的一个稠密子空间，$\mathscr{S}(R^n)$ 是 $C^\infty(R^n)$ 的一个稠密子空间，这个性质请读者自行验证。

定义 1.1.5 称 $C_c^\infty(\Omega)$ 上的线性连续泛函为 $\mathscr{D}'(\Omega)$ **广义函数**，称 $C^\infty(\Omega)$ 上的线性连续泛函为 $\mathscr{E}'(\Omega)$ **广义函数**，称 $\mathscr{S}(R^n)$ 上的线性连续泛函为 $\mathscr{S}'(R^n)$ **广义函数**。

由 (1.13) 以及每个空间在后继的空间中稠密的性质可知，$\mathscr{D}'(R^n)\supset\mathscr{S}'(R^n)\supset\mathscr{E}'(R^n)$，类似地对任意开集 Ω 可有，$\mathscr{D}'(\Omega)\supset\mathscr{E}'(\Omega)$。今后如无特别说明，则所说及的广义函数都是指 $\mathscr{D}'$ 广义函数。

例 5 若 f 是 Ω 上的局部可积函数，则我们可以用下述方法由 f 定义一个广义函数：对于 $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$，令

$$F(\varphi)=\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx, \tag{1.14}$$

F 是 $C_c^\infty(\Omega)$ 上的一个线性泛函。当 $\varphi_\nu\to 0(C_c^\infty(\Omega))$ 时，由于 φ_ν 的支集包含于一个共同的紧集 K 中，所以有

$$|F(\varphi_\nu)|=\left|\int_\Omega f(x)\varphi_\nu(x)dx\right|$$

$$\leqslant\max|\varphi_\nu(x)|\int_K|f(x)|dx\to 0。$$

这说明由 $\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$ 所定义的泛函是连续的。因此 F 是一个

广义函数。在(1.14)的表现形式下，我们将F与f视为等同。从而用同样的记号f表示由(1.14)所定义的广义函数，(1.14)中的积分也常写成$f(\varphi)$或$\langle f,\varphi\rangle$。

例 6 若$0\in\Omega$，按$F(\varphi)=\varphi(0)$所定义的$C_c^\infty(\Omega)$上的线性连续泛函F称为**δ 函数**，有时也形式地记为$\delta(x)$。

§ 2 广义函数的性质与运算

1. 广义函数的支集 我们知道，对于一个连续函数$f(x)$来说，它在特定点x_0的取值是有确切意义的，但对于一个Lebesgue 可积函数来说，它在一个零测度集上的取值是可以任意改变的。因此，说及它在特定点x_0的取值，其意义就不明确了。对于广义函数来说，一般也不能说它在一特定点的取值，但是它在任一开子集上的值（或称它在任一开子集上的限制）却是有确切意义的。事实上，若$T\in\mathscr{D}'(\Omega)$，$\Omega_1\subset\Omega$，则对一切$\varphi\subset C_c^\infty(\Omega_1)$，$\langle T,\varphi\rangle$有定义。而且容易验证$\langle T,\varphi\rangle$是$C_c^\infty(\Omega_1)$上的线性连续泛函，这样就从$T$诱导出了一个$\mathscr{D}'(\Omega_1)$广义函数，它可记为$T|_{\Omega_1}$，在不产生混淆时也简单地记为$T$。

定义 1.2.1 若有一广义函数$T\in\mathscr{D}'(\Omega)$，对任一函数$\varphi\in C_c^\infty(\Omega_1)$ $(\Omega_1\subset\Omega)$成立

$$\langle T,\varphi\rangle=0,\tag{2.1}$$

则称T在Ω_1中为0，或者说T在Ω_1中取零值。

若广义函数T_1,T_2在Ω_1中使T_1-T_2取零值，则称T_1,T_2在Ω_1中相等。于是，一个广义函数可以在R^n的某个开子集上等于一个常义函数，甚至是C^∞函数。例如，δ函数仅在含原点的开集内是“广义”的，而在不含原点的任一开集上取值为零。

定理 1.2.1 若有一广义函数$T\in\mathscr{D}'(\Omega)$，对于任一点$x_0\in$

Ω，均有 x_0 的邻域 O_{x_0}，使 T 在 O_{x_0} 上为零，那末在整个 Ω 内有 $T=0$。

为证明这个定理，我们先证明一个单位分解定理，它不仅在证明定理 1.2.1 时要用到，而且在今后对问题作局部化处理时也经常用到。

定理 1.2.2 （**单位分解定理**） 若在 R^n 中有开集组 $\{O_i\}$，$(i=1,2,\cdots,k)$ 覆盖紧集 K，则可以找到如下的函数组 $\{\varphi_i\}$，其中 $\varphi_i\geqslant 0$，$\varphi_i\in C_c^\infty(O_i)$，且在 K 上 $\sum\limits_{i=1}^{k}\varphi_i=1$。

证明 因为开集 O_1 覆盖集闭 $K\diagdown\bigcup\limits_{i=2}^{k}O_i$，故

$$\delta_1=d\left(\partial O_1,K\diagdown\bigcup_{i=2}^{k}O_i\right)>0。$$

于是我们可以将 O_1 缩小为

$$O'_1=\left\{x\in O_1,\ \mathrm{dist}(x,\partial O_1)>\frac{\delta_1}{2}\right\},$$

则 O'_1 与 O_2，$\cdots$，O_k 一起仍构成对 K 的覆盖。类似地，可以逐个地缩小 $O_2,\cdots,O_k$，使 O'_1，$O'_2,\cdots,O'_k$ 仍构成对 K 的覆盖。

由定理 1.1.1，在每个 O_i 中存在函数 $\psi_i(x)$，使 $\psi_i\in C_c^\infty(O_i)$，且在 O'_i 上 $\psi_i=1$。由于 $K\subset\bigcup\limits_{i=1}^{k}O'_i$，故 $\sum\limits_{i=1}^{k}\psi_i$ 在 K 上恒大于零。令

$$\varphi_i(x)=\psi_i(x)\Big/\sum_{i=1}^{k}\psi_i(x)$$

即得所需的分解

$$1=\sum_{i=1}^{k}\varphi_i(x)。$$

证毕

注 1.2.1 若 Ω 为 R^n 中的开集，且开集组 $\{O_i\}$ $(i=1,2,\cdots,)$ 构成 Ω 的一个局部有限覆盖，每个 $O_i\cap\bar{\Omega}$ 为 $\bar{\Omega}$ 的相对紧

集，则用定理 1.2.2 的方法可以证明，存在一个单位分解

$$\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(x)=1,$$

其中 $\varphi_i\geqslant 0$，$\varphi_i\in C_c^\infty(O_i)$。且由于$\{O_i\}$为$\Omega$的局部有限覆盖，上述和式对每点实际上是有限和 。

定理 1.2.1的证明 对于任一$\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$，则 $\mathrm{supp}\varphi=K$ 为紧集，对Ω中每一点 x_0可作 O_{x_0}，使在其中 $T=0$，这种 O_{x_0} 全体构成对紧集K的一个开覆盖，因比必有有限开覆盖 $O_1,\cdots,O_k$。据定理 1.2.2 可以作单位分解$\sum_{i=1}^{k}\varphi_i=1$，其中 $\varphi_i\in C_c^\infty(O_i)$。于是 $\varphi_i\varphi\in C_c^\infty(O_i)$，从而

$$\langle T,\varphi\rangle=\sum_{i=1}^{k}\langle T,\varphi_i\varphi\rangle=0, \tag{2.2}$$

这就说明T在Ω内恒等于零。

证毕

利用广义函数在开子集中取值的概念，可以定义广义函数的支集如下：

定义 1.2.2 使广义函数T取零值的最大开集的余集，称为广义函数的**支集**，记为 $\mathrm{supp}T$。

由此定义可知，对于广义函数 T 与基本空间的元素φ，当

$$\mathrm{supp}T\cap\mathrm{supp}\varphi=\phi$$

时，必有$\langle T,\varphi\rangle=0$。

如果 $f(x)$为连续函数，则按 § 1 中函数的支集的定义，$f(x)$的支集与它作为广义函数时的支集显然是相同的。

例 1 δ 函数的支集为原点$\{0\}$。

例 2 将在Ω上几乎处处为零的可测函数视为广义函数，其支集是空集。

2. 广义函数的极限 在$\mathscr{D}'(\Omega)$中也可以引入收敛与极限的

概念，在此我们介绍一种常用的弱收敛概念。

定义 1.2.3 若$\mathscr{D}'(\Omega)$中广义函数列$\{T_k\}$对任一$\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$均成立

$$\langle T_k,\varphi\rangle\to 0\quad k\to\infty, \tag{2.3}$$

则称T_k**弱收敛**于0。若T_k-T弱收敛于0，则称T_k弱收敛于T，或T_k以T为**弱极限**，记为$T_k\to T$。

在本书中我们将上述意义下的弱收敛与弱极限分别简称为**收敛与极限**。又当考虑$\mathscr{E}'(\Omega)$广义函数或$\mathscr{S}'(R^n)$广义函数列收敛时，定义 1.2.3 中的要求应改为对相应基本空间$C^\infty(\Omega)$或$\mathscr{S}(R^n)$中的元素φ成立(2.3)式。

例 3 设$\{\delta_h(x)\}$是按下式定义的函数列：

$$\delta_h(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{h} & -\dfrac{h}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{h}{2}\\ 0 & -\infty<x<-\dfrac{h}{2},\ \dfrac{h}{2}<x<\infty,\end{cases} \tag{2.4}$$

利用积分中值定理有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_h(x)\varphi(x)dx=\frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\varphi(x)dx=\varphi(\xi),$$

其中，$\xi\in\left(-\dfrac{h}{2},\ \dfrac{h}{2}\right)$。当$h\to0$时，$\varphi(\xi)\to\varphi(0)$，故有

$$\lim_{h\to0}\langle\delta_h,\varphi\rangle=\varphi(0)=\langle\delta,\varphi\rangle,$$

此即$\delta_h\to\delta$。所以δ函数可以视为(2.4)所给出的函数族的极限。

例 4 设$f_\nu(x)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin\nu x}{x}$，则在$\nu\to\infty$时有$f_\nu\to\delta$。

事实上，对任一C_c^∞函数$\varphi(x)$，利用 Riemann-Lebesgue 引理知

$$\langle f_\nu,\varphi\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\nu x}{x}\varphi(x)dx\to\varphi(0)=\langle\delta,\varphi\rangle。$$

定理 1.2.3 若 $T\in\mathscr{D}'(R^n_y)$，则当 x 视为参变量时，$\langle T, \alpha_\varepsilon(x-y)\rangle$ 为 R^n_x 中的 C^∞ 函数。这里 α_ε 如§1例2所示。

证明 因为对任一固定的 x，$\alpha_\varepsilon(x-y)\in C^\infty_c(R^n_y)$，所以 $\langle T,\alpha_\varepsilon(x-y)\rangle$ 有意义。又当 $x\to x_0$ 时，可以使 $\alpha_\varepsilon(x-y)$ 的支集都落在一个固定的紧集 K 中（例如取 K 为以 x_0 为球心，以 2ε 为半径的闭球即可），且在 K 中 $\alpha_\varepsilon(x-y)$ 的各阶导数都一致地收敛于 $\alpha_\varepsilon(x_0-y)$ 的各阶导数，所以 $x\to x_0$ 时

$$\alpha_\varepsilon(x-y)\to\alpha_\varepsilon(x_0-y)(C^\infty_c(R^n_y)),$$

故
$$\langle T,\alpha_\varepsilon(x-y)\rangle\to\langle T,\alpha_\varepsilon(x_0-y)\rangle,$$

因此

$$T_\varepsilon(x)=\langle T,\alpha_\varepsilon(x-y)\rangle$$

为 x 的连续函数。

又设 $\Delta_k x$ 是 x_k 方向的增量，并作差商

$$\frac{T_\varepsilon(x+\Delta_k x)-T_\varepsilon(x)}{\Delta_k x}=\frac{\langle T,\alpha_\varepsilon(x+\Delta_k x-y)-\alpha_\varepsilon(x-y)\rangle}{\Delta_k x}$$

$$=\langle T,\frac{\alpha_\varepsilon(x+\Delta_k x-y)-\alpha_\varepsilon(x-y)}{\Delta_k x}\rangle.$$

当 $\Delta_k x\to 0$ 时，

$$\frac{\alpha_\varepsilon(x+\Delta_k x-y)-\alpha_\varepsilon(x-y)}{\Delta_k x}\to\partial_k\alpha_\varepsilon(x-y)(C^\infty_c(R^n)),$$

因此差商

$$\frac{1}{\Delta_k x}(T_\varepsilon(x+\Delta_k x)-T_\varepsilon(x))$$

有极限 $\langle T,\partial_k\alpha_\varepsilon(x-y)\rangle$，所以 $T_\varepsilon(x)$ 关于 x_k 可求导。同理可证 $T_\varepsilon(x)$ 具有任意阶导数。

证毕

根据这一定理，我们可以从一个广义函数 T 出发，得到 C^∞ 函数 T_ε，这称为广义函数的正则化，由于当 T 为常义函数时，

将它视为广义函数对 C_c^∞ 函数的作用就是通常的积分，故此时 $\langle T_y, \alpha_\varepsilon(x-y)\rangle$ 与(1.6)式一致，与定理 1.1.2 相仿，我们有

定理 1.2.4 当 $T\in\mathscr{D}'(R^n)$ 时，$T_\varepsilon\to T(\mathscr{D}'(R^n))$。

证明 我们只要证明，对任一 $\varphi\in C_c^\infty(R^n)$ 成立

$$\langle T_\varepsilon,\varphi\rangle\to\langle T,\varphi\rangle。$$

由于 T_ε 为常义函数，故 $\langle T_\varepsilon,\varphi\rangle$ 可用积分

$$\int_{R^n}\langle T_y,\alpha_\varepsilon(x-y)\rangle\cdot\varphi(x)dx$$

计算，我们不妨用 Riemann 积分来计算此值，并将它写成和式极限的形式：

$$\langle T_\varepsilon,\varphi\rangle=\lim_{\max\{d(\Delta_i)\}\to 0}\sum_i\langle T_y,\alpha_\varepsilon(x_i-y)\rangle\varphi(x_i)\Delta_i,$$

这里 $\max\{d(\Delta_i)\}$ 表示 Δ_i 的最大直径。上式可化成

$$\langle T_\varepsilon,\varphi\rangle=\lim_{\max\{d(\Delta_i)\}\to 0}\langle T_y,\sum_i\alpha_\varepsilon(x_i-y)\varphi(x_i)\Delta_i\rangle,$$

因 $\varphi(x)$ 为有界支集函数，记它的支集为 K，则每个 $\alpha_\varepsilon(x_i-y)\varphi(x_i)$ 的支集必含于 $K+O_\varepsilon$：

$$\{x;x=x'+x'',x'\in K,|x''|<\varepsilon\}$$

中，从而 $\sum_i\alpha_\varepsilon(x_i-y)\varphi(x_i)\Delta_i$ 也如此。又当 $\max d(\Delta_i)\to 0$ 时，不仅有

$$\lim_{\max\{d(\Delta_i)\}\to 0}\sum_i\alpha_\varepsilon(x_i-y)\varphi(x_i)\Delta_i=\int_{R^n}\alpha_\varepsilon(x-y)\varphi(x)dx,$$

而且 $\sum_i\alpha_\varepsilon(x_i-y)\varphi(x_i)\Delta_i$ 的各阶导数也收敛于

$$\int\alpha_\varepsilon(x-y)\varphi(x)dx$$

的相应的各阶导数。从而有

$$\sum_i\alpha_\varepsilon(x_i-y)\varphi(x)\Delta_i\to\int_{R^n}\alpha_\varepsilon(x-y)\varphi(x)dx\ \ (C_c^\infty(R^n)),$$

于是

$$\langle T_\varepsilon,\varphi\rangle=\langle T,\int\alpha_\varepsilon(x-y)\varphi(x)dx\rangle=\langle T,\varphi_\varepsilon\rangle。$$

但根据定理1.1.2，当 $\varepsilon\to0$ 时 $\varphi_\varepsilon\to\varphi(C_c^\infty(R^n))$，因此 $\varepsilon\to0$ 时 $\langle T_\varepsilon,\varphi\rangle\to\langle T,\varphi\rangle$。

证毕

3. 广义函数的乘子

定义 1.2.4 设T为$\mathscr{D}'(\Omega)$广义函数，$\psi\in C^\infty(\Omega)$，则定义ψ与T的乘积ψT为由下式决定的广义函数：

$$\langle\psi T,\varphi\rangle=\langle T,\psi\varphi\rangle\quad\forall\varphi\in C_c^\infty(\Omega)。\qquad(2.5)$$

由于$\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$时，$\psi\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$。又若 $\varphi_k\to0(C_c^\infty(\Omega))$，则 $\psi\varphi_k\to0(C_c^\infty(\Omega))$。所以(2.5)式定义了广义函数$\psi T$。我们称$\psi$为广义函数空间$\mathscr{D}'(\Omega)$的**乘子**。

任一$C^\infty(\Omega)$函数也是$\mathscr{E}'(\Omega)$广义函数空间的乘子。而对$S'(R^n)$来说，并非每个$C^\infty(R^n)$函数是它的乘子，但至少$S(R^n)$的每个元素都是$\mathscr{S}'(R^n)$空间的乘子。

利用乘子也可以作$\mathscr{D}'(\Omega)$广义函数的正则化。对$\varepsilon>0$作截断函数$\zeta_\varepsilon(x)\in C_c^\infty(\Omega)$，它在$\Omega_\varepsilon$上恒等于1，支集在$\Omega_{\varepsilon/2}$中（见注1.1.1），再作

$$\tilde{T}_\varepsilon(x)=\langle(\zeta_\varepsilon T),\alpha_{\varepsilon/4}(x-y)\rangle,$$

则有$\tilde{T}_\varepsilon(x)\in C_c^\infty(\Omega)$，且当$\varepsilon\to0$时，$\tilde{T}_\varepsilon\to T(\mathscr{D}'(\Omega))$。这里最后一步的证明请读者自行给出。

4. 广义函数的导数

定义 1.2.5 设T为$\mathscr{D}'(\Omega)$广义函数，定义T关于x_k的**偏导数**$\dfrac{\partial T}{\partial x_k}$为由下式决定的广义函数：

$$\langle\frac{\partial T}{\partial x_k},\varphi\rangle=-\langle T,\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\rangle,\quad\forall\varphi\in C_c^\infty(\Omega)\qquad(2.6)$$

由 $C_c^\infty(\Omega)$ 的极限关系可知，从 $\varphi_\nu \to 0(C_c^\infty(\Omega))$ 可以推出

$$\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_k} \to 0(C_c^\infty(\Omega)),$$

所以 (2.6) 左端确实定义了一个 $C_c^\infty(\Omega)$ 上的线性连续泛函。即 $\frac{\partial T}{\partial x_k}$ 也是 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 广义函数，它称为 T 关于 x_k 的**广义导数**或**导数**。

$\mathscr{E}'(\Omega)$ 广义函数与 $\mathscr{S}'(R^n)$ 广义函数的导数也可相仿地定义。

当 T 为常义的连续可微函数时，若将 (2.6) 左边的 $\frac{\partial T}{\partial x_k}$ 理解为常义的导数，(2.6) 就相当于一个分部积分公式， 它自然是成立的。这就表明对常义的连续可微函数来说，其常义导数与广义导数是一致的。故上述导数概念确实是常义可微函数的导数概念的推广。

类似地可以定义**高阶导数**。对于重指标 α，定义

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)。 \tag{2.7}$$

由此可得有关广义导数的两个性质：

1） 广义函数的任意阶导数存在；

2） 广义函数的导数与求导的次序无关。例如，就二阶导数而言，有

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_j}, \tag{2.8}$$

这是因为对任一 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$，成立

$$\left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_k}, \ \varphi \right\rangle = \left\langle T, \ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j} \right\rangle = \left\langle T, \ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_j}, \ \varphi \right\rangle.$$

例 5 求 Heaviside 函数

$$H(x)=\begin{cases}1 & x>0,\\ 0 & x<0,\end{cases} \tag{2.9}$$

的导数。

作为一个常义函数来说，$H(x)$在$x\neq 0$处导数为0，在$x=0$处导数不存在。但作为广义函数，它在R^1上可导。由于对于任一$\varphi\in C_c^\infty(R^1)$，有

$$\left\langle\frac{dH}{dx},\ \varphi\right\rangle=-\left\langle H,\ \frac{d\varphi}{dx}\right\rangle=-\int_0^\infty\frac{d\varphi}{dx}dx$$

$$=\varphi(0)=\langle\delta,\varphi\rangle,$$

所以$\frac{d}{dx}H(x)=\delta(x)$。

结合定义1.2.4与定义1.2.5，可以定义一个具有C^∞系数的偏微分算子$\sum_{|\alpha|\leq m}a_\alpha(x)\partial^\alpha$对广义函数的作用。此外，结合这两个定义还可以知道，Leibniz公式对于广义函数与C^∞函数乘积的求导也是正确的。

5. 广义函数的自变量变换 设Ω_x与O_y分别为R_x^n与R_y^n中的开集，χ为Ω_x到O_y的微分同胚。则对$v\in L^1(O_y)$，有

$$u=\chi^*v=v\circ\chi\in L^1(\Omega_x),$$

且对于$\varphi\in C_c^\infty(\Omega_x)$有

$$\langle u,\varphi\rangle=\int_{O_y}u(\chi^{-1}(y))\varphi(\chi^{-1}(y))\left|\det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\right|dy$$

$$=\left\langle v,(\varphi\circ\chi^{-1})\left|\det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\right|\right\rangle. \tag{2.10}$$

今对$v\in\mathscr{D}'(O_y)$，我们就以(2.10)定义一个在Ω_x上的广义函数u，并将它记为$u=\chi^*v$。显然，由于$\varphi\in C_c^\infty(\Omega_x)$可得

$$(\varphi\circ\chi^{-1})\left|\det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\right|\in C_c^\infty(O_y),$$

而$\varphi_\nu\to 0(C_c^\infty(\Omega_x))$可推出

$$(\varphi_\nu \circ \chi^{-1})\left|\det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\right| \to 0(C_0^\infty(O_y)),$$

故 $u \in \mathscr{D}'(\Omega_x)$。

又若 χ_1 为 O_y 到 $w_z \subset R_z^n$ 上的微分同胚，则对于 $\mathscr{D}'(w_z)$ 中的广义函数 w 有

$$(\chi_1 \circ \chi)^* w = \chi^* \chi_1^* w。 \tag{2.11}$$

6. 广义函数的 Fourier 变换 本书中我们只讨论 $\mathscr{S}'(R^n)$ 广义函数的 Fourier 变换。它是通过对偶的方式由 $\mathscr{S}(R^n)$ 中的 Fourier 变换导出的，为此，我们首先介绍一些有关 $\mathscr{S}(R^n)$ 函数的 Fourier 变换的性质。由于它们多数是数学分析中熟知的事实，故此处一般不给出其证明。

若 $f \in \mathscr{S}(R^n)$，则定义 f 的 Fourier 变换为

$$(Ff)(\xi) = \int_{R^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx, \tag{2.12}$$

其中 $x\cdot\xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$。$(Ff)(\xi)$ 也常记为 $\hat{f}(\xi)$。

若 $g \in \mathscr{S}(R^n)$，还可定义 g 的 Fourier 逆变换为

$$(F^{-1}g)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n} e^{ix\cdot\xi} g(x)dx, \tag{2.13}$$

则我们有如下的事实：

1） 若 $f \in \mathscr{S}(R^n)$，则

$$\widehat{x_j f}(\xi) = -D_j\hat{f}(\xi), \quad \widehat{x^\alpha f}(\xi) = (-D)^\alpha \hat{f}(\xi), \tag{2.14}$$

$$\widehat{D_j f}(\xi) = \xi_j \hat{f}(\xi), \quad \widehat{D^\alpha f}(\xi) = \xi^\alpha \hat{f}(\xi),$$

这里 $D_j = \frac{1}{i}\partial_j$。

2） $$f = F^{-1}(Ff), \quad \forall f \in \mathscr{S}(R^n) \tag{2.15}$$

3） Fourier 变换与 Fourier 逆变换均确定一个从 $\mathscr{S}(R^n)$ 到 $\mathscr{S}(R^n)$ 的线性连续映射。从而它们均确定了一个从 $\mathscr{S}(R^n)$ 到

$S(R^n)$ 上的拓扑同构。

4） 若 $f,g\in\mathscr{S}(R^n)$，则

$$\langle\hat{f},g\rangle=\langle f,\hat{g}\rangle, \tag{2.16}$$

由此又可得出关于 $L^2(R^n)$ 内积，成立

$$(f,g)=(2\pi)^{-n}(\hat{f},\hat{g})。 \tag{2.17}$$

5） 利用性质 3) 与 (2.17) 式就可将 Fourier 变换扩张为 $L^2(R^n)$ 上的映射，且建立了 $L^2(R^n)$ 到 $L^2(R^n)$ 的线性同构。

定义 1.2.6 设 T 为 $\mathscr{S}'(R^n)$ 广义函数，定义 T 的 Fourier 变换 FT 为由下式决定的广义函数：

$$\langle FT,\varphi\rangle=\langle T,F\varphi\rangle \qquad \forall\varphi\in\mathscr{S}(R^n)。 \tag{2.18}$$

对于 $\mathscr{S}'(R^n)$ 广义函数的 Fourier 变换，同样成立 (2.14) 式。例如，我们取第一式证明之。因为对任意 $\varphi\in\mathscr{S}(R^n)$，

$$\langle F(x_jT),\varphi\rangle=\langle x_jT,F\varphi\rangle=\langle T,x_jF\varphi\rangle$$
$$=\langle T,F(D_j\varphi)\rangle=\langle FT,D_j\varphi\rangle=\langle -D_jFT,\varphi\rangle$$

故有 $F(x_jT)=-D_jFT$。

同样地，我们可以定义 T 的 Fourier 逆变换 $F^{-1}T$：

$$\langle F^{-1}T,\varphi\rangle=\langle T,F^{-1}\varphi\rangle \quad \forall\varphi\in\mathscr{S}(R^n), \tag{2.19}$$

且也有 $T=F^{-1}(FT)$ 对任意 $T\in\mathscr{S}'(R^n)$ 成立。

§ 3 Sobolev 空间

定义 1.3.1 设 $\Omega\subset R^n$ 是一给定的区域，对 $m\geqslant 0$，$1\leqslant p\leqslant\infty$ 定义 Sobolev 空间 $H^{m,p}(\Omega)$ 为满足条件

$$D^\alpha u\in L^p(\Omega) \quad |\alpha|\leqslant m \tag{3.1}$$

的广义函数 u 全体所构成的集合，并装备以范数

$$\|u\|_{H^{m,p}(\Omega)}=\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{1/p} \quad 1\leqslant p<\infty, \tag{3.2}$$

$$\|u\|_{H^{m,\infty}(\Omega)}=\max_{|\alpha|\leq m}\|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}。$$

特别当 $p=2$ 时，记 $H^{m,2}(\Omega)$ 为 $H^m(\Omega)$。这时可引进内积

$$(u,v)_m=\sum_{|\alpha|\leq m}(D^\alpha u,D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}。\tag{3.3}$$

容易验证，(3.2)，(3.3)分别满足范数与内积定义的几个基本要求。

定理 1.3.1 $H^{m,p}(\Omega)$ 是 Banach 空间，$H^m(\Omega)$ 是 Hilbert 空间。

证明 只需证明 $H^{m,p}(\Omega)$ 是完备的。今以 $m=1$ 为例证明之。令 $\{w_\nu\}$ 是 $H^{1,p}(\Omega)$ 中的一个 Cauchy 序列，则 $\{w_\nu\}$ 及 $\left\{\frac{\partial w_\nu}{\partial x_j}\right\}$ $(j=1,\cdots,n)$ 都是 $L^p(\Omega)$ 中的 Cauchy 序列。从而在 $L^p(\Omega)$ 中它们分别有极限 w 和 $w^{(j)}$。由于 $w_\nu\to w(L^p(\Omega))$ 可推得 $w_\nu\to w(\mathscr{D}'(\Omega))$，而由广义函数导数的性质又有

$$\frac{\partial w_\nu}{\partial x_j}\to\frac{\partial w}{\partial x_j}\quad(\mathscr{D}'(\Omega))。$$

然而前面已知 $\frac{\partial w_\nu}{\partial x_j}\to w^{(j)}(L^p(\Omega))$，所以 $\frac{\partial w}{\partial x_j}=w^{(j)}$，且有

$$w\in H^{1,p}(\Omega)\quad 及\quad w_\nu\to w(H^{1,p}(\Omega))。$$

成立，这就是所需证明的。

证毕

根据 $H^{m,p}(\Omega)$ 的定义，易得如下诸性质：

1) $H^{0,p}(\Omega)=L^p(\Omega)$。

2. 若 $m_1\geqslant m_2\geqslant 0$，则 $H^{m_1,p}(\Omega)\subset H^{m_2,p}(\Omega)$，又若 $p_1\geqslant p_2\geqslant 1$，且 Ω 为有界区域，则 $H^{m,p_1}(\Omega)\subset H^{m,p_2}(\Omega)$。

3) 若 $u\in H^{m,p}(\Omega)$，$|\beta|\leqslant m$，则

$$D^\beta u\in H^{m-|\beta|,p}(\Omega)。\tag{3.4}$$

4) 若 $P(x,D)=\sum_{|\alpha|\leq m}a_\alpha(x)D^\alpha$ 为具有 $C^\infty(\bar{\Omega})$ 系数的线性偏

微分算子，$u\in H^{s,p}(\Omega)$，且Ω为有界区域，则当$s\geqslant m$时

$$P(x,D)u\in H^{s-m,p}(\Omega)。\qquad (3.5)$$

5） 若$\tau:\Omega_x\to\omega_y$是一个C^∞变换，其逆变换τ^{-1}也属于C^∞，且两个变换所对应的Jacobi行列式在$\bar{\Omega}_x$与$\bar{\omega}_y$上有界，又$u\in H^{m,p}(\Omega_x)$，则$u(x)$经变换τ所导出的函数$v(y)=u(\tau^{-1}(y))$属于$H^{m,p}(\omega_y)$。

在以后的讨论中，我们一般只要求所讨论的区域Ω有界，且边界$\partial\Omega$为C^∞光滑。这里C^∞光滑的含义是：对任意$x\in\partial\Omega$，存在x的邻域U，使$U\cap\partial\Omega$可用$x_j=\varphi(x_1,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots,x_n)$表示，其中$1\leqslant j\leqslant n$，而且函数$\varphi$是$C^\infty$函数。显然，当区域$\Omega$有界时，边界$\partial\Omega$是紧集，从而可找到有限个开集$U_1,\cdots,U_N$覆盖边界$\partial\Omega$。我们的假定即等价于在每个$U_i(1\leqslant i\leqslant N)$中，$\partial\Omega\cap U_i$可以用$C^\infty$显函数形式表示。

定理 1.3.2 若Ω为具有C^∞边界的有界区域，则任一$H^{m,p}(\Omega)$函数u都可以用$C^\infty(\bar{\Omega})$函数来逼近。亦即存在$C^\infty(\bar{\Omega})$函数列$\{u^{(\nu)}\}$，使$u^{(\nu)}\to u(H^{m,p}(\Omega))$。

证明 这里我们要用到偏微分方程的泛函方法中常用的“局部化”与“展平”的技巧。

由边界$\partial\Omega$所满足的性质知，存在有限个开集$U_1,\cdots,U_N$覆盖$\partial\Omega$。再作U_0，使$\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^{N}U_i\subset U_0$，且$\bar{U}_0\subset\Omega$，设$1=\sum_{i=0}^{N}\eta_i$是从属于$\{U_i\}$的单位分解，$\eta_i\in C_c^\infty(U_i)$，令$u_i=\eta_i u$，则$u=\sum_{i=0}^{N}u_i$，且$u_i\in H^{m,p}(U_i)$。如果我们对每个$u_i$都能找到$u_i^{(\nu)}$，使$u_i^{(\nu)}\in C^\infty(\bar{\Omega})$，且$u_i^{(\nu)}\to u_i(H^{m,p}(\Omega))$成立，则只要令

$$u^{(\nu)}=\sum_{i=0}^{N}u_i^{(\nu)},$$

它就是所需之序列。

当 $i=0$ 时，作

$$u_{0\varepsilon}(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}\int\alpha\left(\frac{x_1-x'_1}{\varepsilon}\right)\cdots\alpha\left(\frac{x_n-x'_n}{\varepsilon}\right)u_0(x')dx', \quad (3.6)$$

式中 $\alpha(s)$ 为第一节例 1 中引入的函数。则当 ε 充分小时，$u_{0\varepsilon}(x)\in C^\infty$，又对任意满足 $|\beta|\leqslant m$ 的重指标 β，

$$\partial_x^\beta u_{0\varepsilon}(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}\int\partial_x^\beta\left(\alpha\left(\frac{x_1-x'_1}{\varepsilon}\right)\cdots\alpha\left(\frac{x_n-x'_n}{\varepsilon}\right)\right)u_0(x')dx'$$

$$=\frac{(-1)^{|\beta|}}{\varepsilon^n}\int\partial_{x'}^\beta\left(\alpha\left(\frac{x_1-x'_1}{\varepsilon}\right)\cdots\alpha\left(\frac{x_n-x'_n}{\varepsilon}\right)\right)u_0(x')dx'$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^n}\int\alpha\left(\frac{x_1-x'_1}{\varepsilon}\right)\cdots\alpha\left(\frac{x_n-x'_n}{\varepsilon}\right)\partial_{x'}^\beta u_0(x')dx'。$$

因为 $\partial_{x'}^\beta u_0(x')\in L^p(\Omega)$，且 $u_0(x')$ 在 U_0 外为 0，所以据定理 1.1.2 知，在 $L^p(\Omega)$ 中

$$\partial_x^\beta u_{0\varepsilon}(x)\to\partial_x^\beta u_0(x)\quad(|\beta|\leqslant m),$$

这就是 $u_{0\varepsilon}\to u_0(H^{m,p}(\Omega))$。

再考察边界区域的情形，此时 $i>0$。当每个 Ω_i 足够小时，我们可以把 Ω 的边界展平，也即可以作一个自变量变换 $\tau:x\to y$，使得 U_i 中区域 Ω 的边界 $x_n=\varphi(x_1,\cdots,x_{n-1})$（为确定起见，不妨设 x_n 可以表为 $x_1,\cdots,x_{n-1}$ 的 C^∞ 显函数形式）变为 $y_n=0$。事实上，

$$\begin{cases}y_i=x_i & 1\leqslant i\leqslant n-1\\ y_n=x_n-\varphi(x_1,\cdots,x_{n-1})\end{cases}\quad (3.7)$$

就是欲求之变换，至多再加一个压缩变换，就可以把区域 $U_i\cap\Omega$ 变到 y 空间的单位半球 $B_+:\left\{y;y_n>0,\sum_{i=1}^n y_i^2<1\right\}$ 中，且将 $U_i\cap\partial\Omega$ 变换到 $y_n=0$ 上。

根据前面所述的 Sobolev 空间 $H^{m,p}(\Omega)$ 的性质知，

$$v(y)=u(\tau^{-1}(y))\in H^{m,p}(B_+)。$$

且由于 $v(y)$ 的支集与$\sum_{i=1}^{n} y_i^2=1$不相交，就可以将 $v(y)$ 零延拓到 R_+^n 中，仍有 $v(y)\in H^{m,p}(R_+^n)$。作

$$v_\varepsilon(y)=\frac{1}{\varepsilon^n}\int\alpha\left(\frac{y_1-y_1'}{\varepsilon}\right)\cdots\alpha\left(\frac{y_{n-1}-y_{n-1}'}{\varepsilon}\right)\alpha$$

$$\times\left(\frac{y_n-y_n'+2\varepsilon}{\varepsilon}\right)v(y')dy' \tag{3.8}$$

它可视为函数 $v(y')$ 的带权积分平均。根据函数 α 的支集特性可知，对于固定的 $(y_1,\cdots,y_n)$ 点，对 v 作积分平均的区域不是以该点为中心，2ε 为边长的立方体，而是

$$|y_i-y_i'|\leqslant\varepsilon \quad (i\leqslant n-1),$$

$$|y_n-y_n'+2\varepsilon|\leqslant\varepsilon,$$

即

$$y_i-\varepsilon\leqslant y_i'\leqslant y_i+\varepsilon\,(i\leqslant n-1),$$

$$y_n+\varepsilon\leqslant y_n'\leqslant y_n+3\varepsilon。$$

由于对 v 作积分平均的区域是中心往 $y_n>0$ 方向移动了 2ε 的立方体，故对于 R_+^n 中任一点作 (3.8) 型的积分平均时，积分区域不会与 $R_-^n=\{y;y_n<0\}$相交。从而以(3.8)作为 $v_\varepsilon(y)$ 的定义是合理的，且有 $v_\varepsilon(y)\in C^\infty(\bar{R}_+^n)$。

根据以上对 (3.8) 中被积函数支集的分析，还可以用分部积分公式计算 $v_\varepsilon(y)$的导数：

$$\partial^\beta v_\varepsilon(y)=\frac{1}{\varepsilon^n}\int\partial_y^\beta\left(\alpha\left(\frac{y_1-y_1'}{\varepsilon}\right)\cdots\alpha\left(\frac{y_{n-1}-y_{n-1}'}{\varepsilon}\right)\right.$$

$$\left.\times\alpha\left(\frac{y_n-y_n'+2\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right)v(y')dy'$$

$$=\frac{(-1)^{|\beta|}}{\varepsilon^n}\int\partial_{y'}^\beta\left(\alpha\left(\frac{y_1-y_1'}{\varepsilon}\right)\cdots\alpha\left(\frac{y_{n-1}-y_{n-1}'}{\varepsilon}\right)\right.$$

$$\left.\times\alpha\left(\frac{y_n-y_n'+2\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right)v(y')dy'$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^n}\int\alpha\left(\frac{y_1-y_1'}{\varepsilon}\right)\cdots\alpha\left(\frac{y_{n-1}-y_{n-1}'}{\varepsilon}\right)$$

$$\times\alpha\left(\frac{y_n-y_n'+2\varepsilon}{\varepsilon}\right)\partial_y^\beta v(y')dy'\text{。}$$

利用定理 1.1.2 中同样方法可以证明，若 $\partial_y^\beta v\in L^p(R_+^n)$，则

$$\partial_y^\beta v_\varepsilon\to\partial_y^\beta v(L^p(R_+^n)),$$

因此，由 $v\in H^{m,p}(R_+^n)$ 可以得知 $v_\varepsilon\to v(H^{m,p}(R_+^n))$ 成立。回到变量 x，可得

$$u_{i\varepsilon}(x)=v_\varepsilon(y(x))\in C^\infty(\overline{U_i\cap\Omega}),$$

$$u_{i\varepsilon}\to u_i(H^{m,p}(U_i\cap\Omega))\text{。}$$

最后，作 $u^{(\nu)}=\sum_{i=0}^{N}u_{i\varepsilon_\nu}$，结合前面关于 U_0 与边界区域 $U_i(i>0)$ 的分析可知本定理成立。

证毕

对于 Ω 为无界区域的情形，可以将定理 1.3.2 的证明稍作修改而得到同样的结论。但当 Ω 的边界不光滑时，一般来说，结论要弱一些。

定理 1.3.3 对于任一区域 $\Omega\subset R^n$，若 $u\in H^{m,p}(\Omega)$，则存在 $C^\infty(\Omega)$ 函数列 $\{u^{(\nu)}\}$，使 $u^{(\nu)}\to u(H^{m,p}(\Omega))$。

证明 令 $\{\Omega_\nu\}$ 是 Ω 的相对紧开子集序列，它们的并集等于 Ω，并使得对每个 $\nu=0,1,\cdots$，$\bar\Omega_\nu\subset\Omega_{\nu+1}$。再令 $\Omega_1'=\Omega_1$，以及当 $\nu>1$ 时 $\Omega_\nu'=\Omega_\nu-\bar\Omega_{\nu-2}$，则 $\{\Omega_\nu'\}$ 构成 Ω 的一个开覆盖，且 Ω 中任一点至多属于 $\{\Omega_\nu'\}$ 中的两个。现在令 $\{\varphi_\nu\}$ 是从属于 $\{\Omega_\nu'\}$ 的单位分解：$1\equiv\sum\varphi_\nu$，$\varphi_\nu\in C_0^\infty(\Omega_\nu')$，对每个 ν 可以取 ε_ν 充分小，使 $\mathrm{supp}\varphi_\nu$ 的 ε_ν 邻域 $\{x;d(x,\mathrm{supp}\varphi_\nu)<\varepsilon_\nu\}$ 的闭包含于 Ω_ν' 中，记

$$v_\nu=\alpha_{\varepsilon_\nu}*(\varphi_\nu u),$$

其中

$$\alpha_{\varepsilon_\nu}(x) = \frac{1}{\varepsilon_\nu^n}\alpha\left(\frac{x}{\varepsilon_\nu}\right)$$

为§1中引入的 C_0^∞ 函数，则由定理1.3.2证明的第一部分可知，对于给定的 $\varepsilon>0$，可以取 ε_ν 充分小，使得

$$\|\varphi_\nu u - v_\nu\|_{H^{m,p}} \leqslant \varepsilon \cdot 2^{-\nu-1}. \tag{3.9}$$

令 $v=\sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu$，由于对每个 $x\in\Omega$，至多属于两个 $\operatorname{supp} v_\nu$，所以这个无穷和式实质上只是有限和，故 $v\in C^\infty(\Omega)$，又对于任一紧集 K，它只和有限个 Ω'_ν 相交，不妨设仅当 $\nu<\nu(K)$ 时 $K\cap\Omega'_\nu\neq\phi$，则有

$$\begin{aligned}
&\left\{\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_K\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha(u-v)\right|^p dx\right\}^{1/p}\\
\leqslant &\sum_{\nu<\nu(K)}\left\{\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_K\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha(\varphi_\nu u-v_\nu)\right|^p dx\right\}^{1/p}\\
\leqslant &\sum_{\nu<\nu(K)}\|\varphi_\nu u - v_\nu\|_{H^{m,p}} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

由 K 的任意性即知 $u-v\in H^{m,p}(\Omega)$，从而 $v\in H^{m,p}(\Omega)$。至此，我们已指出，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $v\in C^\infty(\Omega)\cap H^{m,p}(\Omega)$，使 $\|u-v\|_{H^{m,p}}<\varepsilon$，这就立刻得到定理所需的结论。

证毕

这一定理也说明，$H^{m,p}(\Omega)$ 也可定义为使范数(3.2)有界的 $C^\infty(\Omega)$ 函数按范数(3.2)完备化所得的空间。

定义 1.3.2 $C_0^\infty(\Omega)$ 函数按范数(3.2)完备化所得到的空间称为 $H_0^{m,p}(\Omega)$。

记 $\zeta(t)$ 为 $t<1$ 时等于1而当 $t>2$ 时等于0的 C^∞ 函数，则对任一 $u\in H^{m,p}(R^n)$，$\zeta\left(\frac{|x|}{A}\right)u$ 就属于 $H_0^{m,p}(R^n)$，且当 $A\to\infty$ 时，

$$\zeta\left(\frac{|x|}{A}\right)u\to u(H^{m,p}(R^n))。$$

所以$H_0^{m,p}(R^n)$在$H^{m,p}(R^n)$中稠密，而由$H_0^{m,p}(R^n)$的完备性知两者相等。但是，当Ω有界时，$H_0^{m,p}(\Omega)$为$H^{m,p}(\Omega)$的真子空间。例如，设$\Omega=(a,b)$，则对$C_c^\infty(a,b)$函数$u_\nu(x)$，成立

$$u_\nu(x)=u_\nu(a)+\int_a^x u_\nu'(x)dx=\int_a^x u_\nu'(x)dx。$$

因此，当$\{u_\nu\}$按$H^{1,p}(a,b)$的范数构成一Cauchy序列时，

$$|u_\nu(x)-u_\mu(x)|\leqslant\int_a^x|u_\nu'(x)-u_\mu'(x)|dx$$

$$\leqslant C\|u_\nu'-u_\mu'\|_{L^p}\leqslant C\|u_\nu-u_\mu\|_{H^{1,p}}。$$

故$\{u_\nu(x)\}$在(a,b)上一致收敛。它收敛于一个在(a,b)上的连续函数，且在a,b两端之值是零。换句话说，$H_0^{1,p}(a,b)$中任一元素几乎处处等于一个在$a+0$与$b-0$为零的连续函数。但是，对常数1，我们无法改变它在零测度集上的值，使之等于一个上述的连续函数。故$1\notin H_0^{1,p}(a,b)$，但显然$1\in H^{1,p}(a,b)$。所以$H_0^{1,p}(a,b)$是$H^{1,p}(a,b)$的真子空间。

以下我们讨论指数m为负整指数的Sobolev空间$H^{m,p}(\Omega)$，一般将它称为负指数Sobolev空间。

定义 1.3.3 对正整数$m,1\leqslant p<\infty$，将$H_0^{m,p}(\Omega)$的对偶空间$(H_0^{m,p}(\Omega))'$视作$\mathscr{D}'(\Omega)$的子空间，称为$H^{-m,p'}(\Omega)$，其中p'满足$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$。

对这个定义需作两点说明，首先，由于$C_0^\infty(\Omega)$在$H_0^{m,p}(\Omega)$中稠密，所以$H_0^{m,p}(\Omega)$上的任一线性连续泛函唯一地对应着$C_0^\infty(\Omega)$上的一个线性连续泛函，所以$(H_0^{m,p}(\Omega))'$可以视为$\mathscr{D}'(\Omega)$的子空间。其次，$(H_0^{m,p}(\Omega))'$中的元素如何表示是重要的。例如，当$p=2$时，$H_0^m(\Omega)=H_0^{m,2}(\Omega)$是Hilbert空间，所以该空间的共

轭空间可以与其自身同构，但是在这样的同构对应下，任一 $H_0^m(\Omega)$ 函数 v 所对应的泛函应该是

$$\tilde{v}(u)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}(D^\alpha v,\overline{D^\alpha u})_{L^2(\Omega)},\forall u\in H_0^m(\Omega),\qquad(3.10)$$

但是，当我们将 $H_0^m(\Omega)$ 上的线性连续泛函视为 $\mathscr{D}'$ 广义函数时，已默认了§1例5中所确定的对应关系，即将可积函数 v 与泛函 $v\to\int_\Omega vudx$ 视为相同的。故在这样的观点下，$H_0^m(\Omega)$ 函数 v 所对应的泛函应当是

$$\tilde{v}(u)=(v,\bar{u})_{L^2(\Omega)},\qquad\forall u\in H_0^m(\Omega),\qquad(3.11)$$

显然，在 $m\neq0$ 时它与(3.10)不同，所以我们特别在定义中加上"视作 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 的子空间"，以免误解。

在 $H^{-m,p'}(\Omega)$ 中也可以引入范数

$$\|u\|_{H^{-m,p'}(\Omega)}=\sup_{v\in H_0^{m,p}(\Omega)}\frac{|\langle u,v\rangle|}{\|v\|_{H_0^{m,p}(\Omega)}}。\qquad(3.12)$$

由此即得，当 $u\in H^{-m,p'}(\Omega)$，$v\in H_0^{m,p}(\Omega)$ 时成立：

$$|\langle u,v\rangle|\leqslant\|u\|_{H^{-m,p'}}\|v\|_{H^{m,p}}\ 。\qquad(3.13)$$

若将 m 可能取负指数的情形考虑在内，我们也可建立如下的性质：

1) 若 $m_1\geqslant m_2$，$1<p<\infty$，则 $H^{m_1,p}(\Omega)\subset H^{m_2,p}(\Omega)$。又对有界区域 Ω，若 $1<p_1<p_2<\infty$，则 $H^{m,p_2}(\Omega)\subset H^{m,p_1}(\Omega)$。

2) 若 $P(x,D)$ 为具有 $C^\infty(\bar{\Omega})$ 系数的 l 阶偏微分算子，$u\in H^{m,p}(\Omega)$，其中 m 为任意整数，$1<p<\infty$，则

$$P(x,D)u\in H^{m-l,p}(\Omega)。\qquad(3.14)$$

事实上，我们只需对任意的重指标 β，证明

$$D^\beta u\in H^{m-|\beta|,p}(\Omega)。\qquad(3.15)$$

对于 $m\geqslant|\beta|$ 的情形，即有本节中(3.4)式。故只要讨论 $m<|\beta|$ 的情形即可。对于 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，若 $m\leqslant0$

$$|(D^\beta u,\varphi)| = |(u,D^\beta\varphi)|$$
$$\leqslant C\|D^\beta\varphi\|_{H^{-m,p'}} \leqslant C\|\varphi\|_{H^{|\beta|-m,p'}}。$$

又若 $0<m<|\beta|$，可取 $\beta_1\leqslant\beta$，$|\beta_1|=m$。则有

$$|(D^\beta u,\varphi)| = |(D^{\beta_1}u,D^{\beta-\beta_1}\varphi)|$$
$$\leqslant C\|D^{\beta-\beta_1}\varphi\|_{L^{p'}} \leqslant C\|\varphi\|_{H^{|\beta|-m;p'}}。$$

所以我们可以由 $D^\beta u$ 定义一个 $\dot{H}_0^{|\beta|-m,p'}(\Omega)$ 上的线性连续泛函，故 $D^\beta u\in H^{m-|\beta|,p}(\Omega)$，利用(3.15)式导出(3.14)式是显然的。

3) $H^{m,p}(\Omega)$ 在自变量的 C^∞ 微分同胚变换下保持不变。

我们再证明定理 1.3.3 的一个推广。

定理 1.3.4 对任意整数 m，$1<p<\infty$，$C^\infty(\Omega)\cap H^{m,p}(\Omega)$ 在 $H^{m,p}(\Omega)$ 中稠密。

证明 由定理1.3.3，我们只需要考察第一指标 m 为负的情形。首先注意到，当 $m\geqslant 0$，$1<p<\infty$ 时，$H^{m,p}(\Omega)$ 是一个自反的 Banach 空间。事实上，若记 $N(m,n)$ 是使得 $|\alpha|\leqslant m$ 的 n 维数组 α 的数目，则存在一个从 $H^{m,p}(\Omega)$ 到 $(L^p(\Omega))^{N(m,n)}$ 的一个线性闭子空间上的自然同构 $i:u\mapsto(\partial^\alpha u)_{|\alpha|\leqslant m}$。由于 $1<p<\infty$ 时 $L^p(\Omega)$ 为自反的，从而 $(L^p(\Omega))^{N(m,n)}$ 为自反的。映照 i 的像为自反 Banach 空间的线性闭子空间，故也是自反的，从而 $H^{m,p}(\Omega)$ 为自反的。

今若 $m_1>0$，$1<p<\infty$，我们证明 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $H^{-m_1,p}(\Omega)$ 中稠密。为此只需指出：$H^{-m_1,p}(\Omega)$ 的任一线性连续泛函 f，若在 $C_0^\infty(\Omega)$ 上为零，则必在 $H^{-m_1,p}(\Omega)$ 上为零。由于 $H^{m_1,p'}(\Omega)$ 空间是自反的，故 f 可以用 $H^{m_1,p'}(\Omega)$ 中的元素 u 表示为

$$f(v)=\langle u,v\rangle,\ v\in H^{-m_1,p}(\Omega)$$

显然，若对一切 $v\in C_0^\infty(\Omega)$ 成立 $\langle u,v\rangle=0$，则必有 $u=0$，这就说明了 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $H^{-m_1,p}(\Omega)$ 中稠密，故 $C^\infty(\Omega)\cap H^{-m_1,p}(\Omega)$ 在 $H^{-m_1,p}$ 中也稠密。所以定理对 m 为负整数情形也成立。

证毕

与定理1.3.3后面的说明相仿，由定理1.3.4可推知，负整指数Sobolev空间也可从$C^\infty(\Omega)$函数由范数(3.12)进行完备化而得到。

在本节最后，我们简略地介绍具有一般实指数的Sobolev空间$H^s(R^n)$，$s\in R^1$(它也常被称为具有分指数的Sobolev空间)。

定义 1.3.4 设s是一个实数，记$H^s(R^n)$是适合

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi)\in L^2(R^n) \tag{3.16}$$

的所有广义函数$u\in\mathscr{S}'(R^n)$所组成的空间，装备着内积

$$(u,v)_s=\int_{R^n}(1+|\xi|^2)^s\hat{u}(\xi)\,\overline{\hat{v}(\xi)}d\xi。 \tag{3.17}$$

显然，由(3.17)可以导出$H^s(R^n)$中的范数为

$$\|u\|_s^2=\int_{R^n}(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2d\xi。 \tag{3.18}$$

定理 1.3.5 对每个实数s，$H^s(R^n)$是一个Hilbert空间。且$C_0^\infty(R^n)$在$H^s(R^n)$中稠密。

证明 若$\{u_j\}$是$H^s(R^n)$中的Cauchy序列，则按定义，$\{(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}_j(\xi)\}$是$L^2(R^n)$中的Cauchy序列。由$L^2$空间的完备性知$(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}_j(\xi)$在$L^2$中收敛于$\hat{v}(\xi)$，$v\in\mathscr{S}'(R^n)$再令$u$为$(1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{v}(\xi)$的Fourier逆变换。则有

$$\hat{u}(\xi)=(1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{v}(\xi),$$

且

$$u_j\to u(H^s(R^n))。$$

为证$C_0^\infty(R^n)$在$H^s(R^n)$中的稠密性，我们只需证明$\mathscr{S}(R^n)$在$H^s(R^n)$中的稠密性。今若$u\in H^s(R_x^n)$，则因为$\mathscr{S}(R_\xi^n)$在$L^2(R_\xi^n)$中稠密，故对给定的$\varepsilon>0$，存在$h(\xi)\in\mathscr{S}(R_\xi^n)$，使

$$\|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi)-h(\xi)\|_{L^2}<\varepsilon,$$

但$(1+|\xi|^2)^{-s/2}h(\xi)$仍属于$\mathscr{S}(R_\xi^n)$，故令φ为$(1+|\xi|^2)^{-s/2}h(\xi)$

的 Fourier 逆变换，它属于$\mathscr{S}(R^n_x)$，从而有

$$\|u-\varphi\|_s<\varepsilon,$$

这就得$\mathscr{S}(R^n)$在$H^s(R^n)$中的稠密性。

证毕

定理 1.3.6 当 s 为整数时，定义 1.3.4 中引入的 Sobolev 空间 $H^s(R^n)$与定义 1.3.1 中引入的 Sobolev 空间一致。

证明 为避免混淆，本定理中以$H^s(R^n)$表示按定义 1.3.4 引入的空间，以$H^{s,2}(R^n)$表示按定义 1.3.1 引入的空间。

显然，当 $s=0$ 时，两者均为$L^2(R^n)$。

当 s 为正整数时，

$$\|u\|_{H^{s,2}(R^n)}=\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant s}\|D^\alpha u\|^2_{L^2(R^n)}\Big)^{1/2}$$

$$=\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{|\alpha|\leqslant s}\int_{R^n}|\xi^\alpha\hat{u}(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2},\qquad(3.19)$$

于是由不等式

$$c_1(1+|\xi|^2)^s\leqslant\sum_{|\alpha|\leqslant s}|\xi|^{2\alpha}\leqslant c_2(1+|\xi|^2)^s$$

即得$\|u\|_s$与$\|u\|_{H^{s,2}(R^n)}$等价。

当 s 为负整数时，由于

$$H_0^{m,2}(R^n)=H^{m,2}(R^n)$$

对任意正整数 m 成立，故记 $m=-s$，有

$$H^{s,2}(R^n)=(H^{m,2}(R^n))'.$$

利用前面已证明的事实

$$H^{m,2}(R^n)=H^m(R^n),$$

我们只需证明，$H^s(R^n)$与$H^{-s}(R^n)$互为对偶。为证明这一点，首先注意到$\mathscr{S}(R^n)$在$H^s(R^n)$中稠密，故$(H^s(R^n))'$是$\mathscr{S}'(R^n)$的子空间。今若$u\in(H^s(R^n_x))'$，则对一切$\varphi\in H^s(R^n_x)$均有

$$|\langle u,\varphi\rangle|\leqslant C\|\varphi\|_{H^s}.$$

现对任一 $h(\xi)\in\mathscr{S}(R^n_\xi)$，令

$$\varphi=F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-s/2}h(\xi)],$$

则

$$|\langle\hat{u}(\xi)(1+|\xi|^2)^{s/2},h(\xi)\rangle|=|\langle\hat{u},\hat{\varphi}\rangle|=(2\pi)^n|\langle u,\varphi\rangle|$$
$$\leqslant C\|\varphi\|_{H^s}=C\|h\|_{L^2},$$

从而由 $\mathscr{S}(R^n_\xi)$ 在 $L^2(R^n_\xi)$ 中稠密性可知

$$\hat{u}(\xi)(1+|\xi|^2)^{s/2}\in L^2(R^n_\xi),$$

此即 $u\in H^{-s}(R^n_x)$，这就证明了，

$$(H^s(R^n))'=(H^{-s}(R^n)),$$

从而

$$H^{s,2}(R^n)=H^s(R^n)$$

在 s 为负整数时也成立。

证毕

§4 $\mathrm{H}^m(\Omega)$函数的边界性质

本节中讨论 Sobolev 空间中元素的边界性质。我们将仅限于 $H^m(\Omega)$进行讨论，并且总假设区域Ω的边界是光滑的。

定理 1.4.1 若 $m\geqslant0$，则 $u\in H^m_0(\Omega)$ 的充要条件是 u 的零延拓元素

$$\tilde{u}=\begin{cases}u, & \Omega\\0, & R^n\setminus\Omega\end{cases}$$

属于$H^m(R^n)$。

证明 必要性。若 $u\in H^m_0(\Omega)$，则必有 $u_n\in C^\infty_0(\Omega)$，使 $u_n\to v(H^m(\Omega))$，此时若将 u_n 作零延拓到 Ω 外，则相应的零延拓元素 $\tilde{u}_n$ 仍为 C^∞ 函数。由于 $\tilde{u}_n$ 在 $H^m(R^n)$ 中的范数与 u_n 在 $H^m(\Omega)$ 中的范数一致，故 $\tilde{u}_n$ 是 $H^m(R^n)$中的基本序列，且 $\tilde{u}_n\to\tilde{u}(H^m(R^n))$，

所以$\tilde{u}\in H^m(R^n)$。

充分性。 应用"局部化"与"展平"的技巧，可以把问题归结为：若将支集有界的$H^m(R^n_+)$函数v作零延拓到R^n以后仍为$H^m(R^n)$函数，则能否断定$v\in H^m_0(R^n_+)$？

仍记$\tilde{v}$为v作零延拓到R^n上的函数，$\alpha(+)$为§1例1中引入的C^∞函数，令

$$v_\varepsilon(y)=\frac{1}{\varepsilon^n}\int_{R^n}\alpha\left(\frac{y_1-y'_1}{\varepsilon}\right)\cdots\alpha\left(\frac{y_{n-1}-y'_{n-1}}{\varepsilon}\right)$$

$$\times\alpha\left(\frac{y_n-y'_n-2\varepsilon}{\varepsilon}\right)\tilde{v}(y')dy', \qquad (4.1)$$

则$v_\varepsilon(y)\in C^\infty(\overline{R^n_+})$。又当$y_n<\varepsilon$时，被积函数为零，这是因为在被积函数支集中$y'_n>0$，从而当$y_n<\varepsilon$时，

$$\frac{y_n-y'_n-2\varepsilon}{\varepsilon}<\frac{\varepsilon-2\varepsilon}{\varepsilon}<-1,$$

所以$\alpha\left(\frac{y_n-y'_n-2\varepsilon}{\varepsilon}\right)=0$。这说明$\operatorname{supp}v_\varepsilon$含于$y_n\geqslant\varepsilon$的半平面中，故$v_\varepsilon\in C^\infty_0(R^n_+)$。此外，从(4.1)可知，当$\varepsilon\to0$时

$$v_\varepsilon\to v(L^2(R^n_+))。$$

将(4.1)式求导，得

$$\partial^\beta v_\varepsilon(y)=\frac{1}{\varepsilon^n}\int_{R^n}\alpha\left(\frac{y_1-y'_1}{\varepsilon}\right)\cdots\alpha\left(\frac{y_{n-1}-y'_{n-1}}{\varepsilon}\right)$$

$$\times\alpha\left(\frac{y_n-y'_n-2\varepsilon}{\varepsilon}\right)\partial^\beta_{y'}\tilde{v}(y')dy'$$

故又有$\partial^\beta v_\varepsilon(y)\to\partial^\beta v(y)(L^2(R^n_+))$。所以$v_\varepsilon(y)\to v(y)(H^m(R^n_+))$，$v\in H^m_0(R^n_+)$。

证毕

对于一般的$H^m(\Omega)$函数，是否也能按适当方式延拓成为$H^m(R^n)$函数呢？下面的定理回答了这个问题。

定理 1.4.2 $u\in H^m(\Omega)$的充要条件是：u可以视为$H^m(R^n)$函数在Ω上的限制。

证明 我们先就m为正整数的情形来证明本定理。由于充分性是显然的，故以下证明必要性，即我们需证明，任意$H^m(\Omega)$函数u必可延拓成一个$H^m(R^n)$函数。

首先指出，若对任一开集Ω_1，满足$\Omega\subset\subset\Omega_1$，能将$u$延拓成为$H^m(\Omega_1)$函数，则$u$必能延拓为$H^m(R^n)$函数。事实上，将由$u$延拓成的$H^m(\Omega_1)$函数记为$u_1$，并作函数$\eta\in C_c^\infty(\Omega_1)$，使它在$\Omega$上恒等于1，那末$\eta u_1$就是$u$在$R^n$上的延拓(在$R^n\setminus\Omega_1$上令$\eta u_1$为0)，并且显然有$\eta u_1\in H^m(R^n)$。所以，我们只要能将$H^m(\Omega)$函数$u$保持$H^m$性质延拓到边界外侧一点儿，就能将$u$保持$H^m$性质从$\Omega$延拓到$R^n$中。而利用局部化技术，又可将问题化为对$H^m(R_+^n)$函数的讨论，即要证明，若$u\in H^m(R_+^n)$，$u$的支集紧于$\bar{R}_+^n$，则$u$可延拓为$H^m(R^n)$函数。

据定理1.3.2，可以找到函数列$\{u^{(\nu)}\}$，使$u^{(\nu)}\in C^\infty(\bar{R}_+^n)$，且$u^{(\nu)}\to u(H^m(R_+^n))$。对于每个$u^{(\nu)}$，定义函数$v^{(\nu)}$为

$$v^{(\nu)}(x',x_n)=\begin{cases}u^{(\nu)}(x',x_n), & x_n\geqslant 0,\\ \sum_{j=1}^{m}C_j u^{(\nu)}(x',-jx_n), & x_n<0,\end{cases}\tag{4.2}$$

这里的C_j是由下式定义的常数：

$$\sum_{j=1}^{m}(-j)^k C_j=1\quad 0\leqslant k\leqslant m-1\,。\tag{4.3}$$

注意到(4.3)式中C_j的系数行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & -2 & \cdots & -m\\ & \cdots\cdots & & \\ (-1)^{m-1} & (-2)^{m-1} & \cdots & (-m)^{m-1}\end{vmatrix}\neq 0,$$

所以C_j可以唯一地由（4.3）式决定。由于C_j满足（4.3）式，故由(4.2)所定义的函数在$x_n=0$上直至$m-1$阶导数都连续。事实上，当$k\leqslant m-1$时，

$$\partial_{x_n}^k\left(\sum_{j=1}^{m}C_j u^{(\nu)}(x',-jx_n)\right)\Big|_{x_n=0}$$

$$=\sum_{j=1}^{m}C_j(-j)^k\partial_{x_n}^k u^{(\nu)}(x',0)。$$

$$=\partial_{x_n}^k u^{(\nu)}(x',0).$$

此外易见，每个$u^{(\nu)}$的m阶导数在R_+^n, R_-^n上均连续，在$x_n=0$处可能有第一类间断，因此，每个$v^{(\nu)}$属于$H^m(R_+^n)$。且由$\{u^{(\nu)}\}$是$H^m(R_+^n)$中的基本序列可知$\{v^{(\nu)}\}$也是$H^m(R^n)$中的基本序列。从而$\{v^{(\nu)}\}$在$H^m(R^n)$中收敛于v。显然，当$x_n>0$时，$v=u$。这样，我们就得到了函数u在R^n上的延拓，且$\|v\|_{H^m(R^n)}$可用$C\|u\|_{H^m}(R_+^n)$来控制。以下我们简称v是函数u保持H^m范数可控的延拓。

当$m=0$时，$H^0(\Omega)=L^2(\Omega)$，此时将u作零延拓到Ω外，即得$H^0(R^n)$函数。

当$m<0$时，取$m_1=-m>0$，则$u\in H^m(\Omega)$为$H_0^{m_1}(\Omega)$上的线性连续泛函。这时，取$u\in H^m(\Omega)$在R^n上的延拓为这样的广义函数$\tilde{u}$，它对$\varphi\in C_c^\infty(R^n)$之作用为

$$\langle\tilde{u},\varphi\rangle=\sup_{\psi}\langle u,\varphi-\psi\rangle, \tag{4.4}$$

其中ψ为φ在$R^n\diagdown\bar{\Omega}$上的限制到R^n上的延拓，且对给定的常数C_0成立$\|\psi\|_{H^{m_1}(R^n)}\leqslant C_0\|\varphi\|_{H^{m_1}}(R^n\diagdown\bar{\Omega})$。由于$\varphi-\psi$在$R^n\diagdown\bar{\Omega}$上为零，故$\varphi-\psi$在$\Omega$上为$H_0^{m_1}(\Omega)$函数，从而(4.4)有意义。易见，(4.4)关于$\varphi$为线性的。今为说明$\tilde{u}\in H^m(R^n)$，需指出由(4.4)定义的对偶积关于$H^{m_1}(R^n)$是连续的。事实上，

$$|\langle\tilde{u},\varphi\rangle|=\sup_{\psi}|\langle u,\varphi-\psi\rangle|$$

$$\leqslant C\|\varphi-\psi\|_{H^{m_1}(\Omega)}$$
$$\leqslant C(\|\varphi\|_{H^{m_1}(\Omega)}+C_0\|\varphi\|_{H^{m_1}(R^n\setminus\bar{\Omega})})$$
$$\leqslant C'\|\varphi\|_{H^{m_1}(R^n)},$$

故 $\tilde{u}\in H^m(R^n)$。又当 $\operatorname{supp}\varphi\subset\Omega$ 时，φ 在 $R^n\setminus\bar{\Omega}$ 上的限制为 0，故 ψ 必须取为零。从而 $\langle\tilde{u},\varphi\rangle=0$。这就说明 $\tilde{u}$ 在 Ω 中与 u 相等，从而 $\tilde{u}$ 为 u 的延拓。

证毕

定理 1.4.1 与 1.4.2 对于一般的 $H^{m,p}(\Omega)$ 函数也是成立的。但必须指出，在本节初所作的关于 Ω 具有光滑边界的说明是重要的。否则，定理的结论可能不成立。

例 1 设 Ω 为平面 Oxy 上由 $y=0$, $y=x^4$, $x=1$ 所围成的区域，$u=\dfrac{1}{x}$，则易知 $u\in H^1(\Omega)$。但由于 u 在边界 $y=0$ 上的值在原点附近非平方可积，故由下面的迹定理可知，u 不可能延拓到原点的邻域中，而仍保持 H^1 的性质。

现在我们研究一般的 $H^m(\Omega)$ 函数在边界上取值的性质。由于边界 $\partial\Omega$ 对于 Ω 来说是零测度集，所以以后凡说及 $H^m(\Omega)$ 函数在边界上的取值都得按下面定理中所述的意义来理解。下面我们先考察 Ω 为 R_+^n 的情形。

定理 1.4.3 设 γ 是 $C^\infty(\bar{R}_+^n)$ 函数 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 到边界 $x_n=0$ 上的边界值 $\varphi(x_1,\cdots,x_{n-1},0)$ 的映射，则它可连续地扩张到整个 $H^1(R_+^n)$ 上，且 $\gamma(H^1(R_+^n))\subset H^{1/2}(R^{n-1})$。

证明 设 $v\in H^1(R_+^n)$，则存在 $C^\infty(\bar{R}_+^n)$ 中具紧支集的函数列 $\{v_\nu\}$，使 $v_\nu\to v(H^1(R_+^n))$。今以 $\hat{v}_\nu(\xi',x_n)$ 记 $v_\nu(x)$ 关于 $x'=(x_1,\cdots,x_{n-1})$ 的 Fourier 变换，我们有

$$|\hat{v}_\nu(\xi',0)|^2=-2\mathrm{Re}\int_0^{+\infty}\frac{\partial\hat{v}_\nu}{\partial x_n}(\xi',x_n)\overline{\hat{v}_\nu(\xi',x_n)}dx_n。\quad(4.5)$$

两边乘以$(1+|\xi'|^2)^{1/2}$，并关于ξ'在R^{n-1}上积分，则根据Schwarz不等式，即得

$$
\begin{aligned}
&\|\gamma v_\nu\|^2_{H^{1/2}(R^{n-1}_{x'})}\\
\leqslant &2\left(\int_{R^{n-1}_{\xi'}}\int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial \hat{v}_\nu}{\partial x_n}(\xi', x_n)\right|^2 dx_n d\xi'\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\times\left(\int_{R^{n-1}_{\xi'}}\int_0^{+\infty}(1+|\xi'|^2)|\hat{v}_\nu(\xi', x_n)|^2 dx_n d\xi'\right)^{\frac{1}{2}}\\
\leqslant &\int_{R^{n-1}_{x'}}\int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial v_\nu}{\partial x_n}(x', x_n)\right|^2 dx_n dx'\\
&+\int_{R^{n-1}_{x'}}\int_0^{+\infty}|v_\nu(x', x_n)|^2 dx_n dx'\\
&+\sum_{i=1}^{n-1}\int_{R^{n-1}_{x'}}\int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial v'_\nu}{\partial x_i}(x', x_n)\right|^2 dx_n dx'\\
= &\|v_\nu\|^2_{H^1(R^n_{x+})}。
\end{aligned}
$$

故由$v_\nu\to v(H^1(R^n_+))$，即知γv_ν在$H^{1/2}(R^{n-1})$中构成一个Cauchy序列，它的极限元素就记为γv，并称为v在边界$x_n=0$上的迹。显然，$\gamma v\in H^{1/2}(R^{n-1})$。

证毕

注 1.4.1 当$v\in H^1_0(R^n_+)$时，v在$x_n=0$上的迹γv为零。事实上，由空间$H^1_0(R^n_+)$的定义知，存在$C^\infty_c(R^n_+)$函数列$\{v_\nu\}$，使$v_\nu\to v(H^1(R^n_+))$，显见$\gamma v_\nu=0$。所以它们在$H^{1/2}(R^{n-1})$中的极限也必为零。

注 1.4.2 若$v\in H^m(R^n_+)$，则可以定义v在边界$x_n=0$上的迹$\gamma_0 v, \gamma_1 v, \cdots, \gamma_{m-1}v$。对每个$j(0\leqslant j\leqslant m-1)$，$\gamma_j$是从$H^m(R^n_+)$到$H^{m-j-1/2}(R^{n-1})$的线性连续映照。对于$C^\infty(\bar{R}^n_+)$函数$v$，有

$$\gamma_j v=\frac{\partial^j v}{\partial x_n^j}。$$

定理1.4.3也称为**迹定理**，为了给出迹定理的一般形式，我们

必须引入在有界区域中或在该区域边界上具有实指数的 Sobolev 空间的概念。

设 Ω 为具有光滑边界的有界区域，s 为实数，则 $H^s(\Omega)$ 定义为 $H^s(R^n)$ 在 Ω 上的限制。由定理 1.4.2 知，当 s 为整数时，这样的定义与第三节中定义一致。

对于边界 $\partial\Omega$，若它为 C^∞ 光滑，则存在开集组 $\{O_i\}$，$1\leqslant i\leqslant N$，使 $\bigcup O_i\supset\partial\Omega$，且在每个 O_i 中可以引入 C^∞ 自变数变换将 $\partial\Omega\cap O_i$ 展平为 R^{n-1} 中的一部分 ω_i。于是，如果 u 是定义在边界 $\partial\Omega$ 上的函数，利用从属于 $\{O_i\}$ 的单位分解 $\{\eta_i\}$（在 $\partial\Omega$ 上 $\sum\eta_i=1$，$\mathrm{supp}\,\eta_i\subset O_i$，$\eta_i\in C_0^\infty(O_i)$），可以将 u 写成 $\sum\eta_i u=\sum u_i$。今若每个 u_i 通过 C^∞ 自变数变换后所导出的函数 $\tilde{u}_i$ 属于 $H^s(\omega_i)$，则称 $u\in H^s(\partial\Omega)$，且将 $\sum\limits_{i=1}^{N}\|\tilde{u}_i\|_{H^s(\omega_i)}$ 取作为 u 的 $H^s(\partial\Omega)$ 范数。可以证明，当上述单位分解或相应的自变数变换选取不同时，u 属于 $H^s(\partial\Omega)$ 的性质不变，且所引入的 $H^s(\partial\Omega)$ 范数保持等价。

于是我们可以将迹定理的一般形式叙述为

定理 1.4.4 设 Ω 为具有光滑边界的有界区域，$s>\frac{1}{2}+k$（j 为正整数），$u\in H^s(\Omega)$，则可以定义 u 在边界 $\partial\Omega$ 上的迹 $\gamma_0 u,\gamma_1 u,\cdots,\gamma_k u$，其中 $\gamma_j(0\leqslant j\leqslant k)$ 是 $H^s(\Omega)$ 到 $H^{s-1/2-j}(\partial\Omega)$ 的线性连续映照，且对于 $C^\infty(\bar{R}^n_+)$ 函数 u，$\gamma_j u$ 就是 $\dfrac{\partial^j u}{\partial\nu^j}$ 在边界 $\partial\Omega$ 上的取值，这里 $\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ 表示对 Ω 的外法向求导。

定理 1.4.4 的证明可见[3]，我们在此顺便指出，当 m 为正整数时，$H_0^m(\Omega)$ 函数 u 在边界 $\partial\Omega$ 上的迹 $\gamma_0 u$，$\gamma_1 u$，…，$\gamma_{m-1}u$ 均为 0。

下面，我们应用迹的概念给出一个定理，它指出在什么条件

下，两个相邻区域中的H^1函数可以保持H^1性质而衔接起来。

定理 1.4.5 设$u_1\in H^1(R_+^n)$，$u_2\in H^1(R_-^n)$，在$x_n=0$上有$\gamma u_1=\gamma u_2$，则若定义L^2函数

$$u=\begin{cases}u_1, & x_n>0,\\ u_2, & x_n<0,\end{cases}$$

u必为$H^1(R^n)$函数。

证明 我们首先指出，对任一具有紧支集的$C^\infty(\bar{R}_+^n)$函数φ，成立

$$\int_{R_+^n}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\varphi dx=-\int_{R_+^n}u_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx,\quad 1\leqslant i\leqslant n-1, \tag{4.6}$$

$$\int_{R_+^n}\frac{\partial u_1}{\partial x_n}\varphi dx=-\int_{R^{n-1}}(\gamma u_1)\varphi(x',0)dx'-\int_{R_+^n}u_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}dx。$$

事实上，由于$u_1\in H^1(R_+^n)$，故有

$$u_1^{(\nu)}\in C^\infty(\bar{R}_+^n),\ u_1^{(\nu)}\to u_1(H^1(R_+^n))。$$

对$u_1^{(\nu)}$显然成立

$$\int_{R_+^n}\frac{\partial u_1^{(\nu)}}{\partial x_i}\varphi dx=-\int_{R_+^n}u_1^{(\nu)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx,\quad 1\leqslant i\leqslant n-1,$$

$$\int_{R_+^n}\frac{\partial u_1^{(\nu)}}{\partial x_n}\varphi dx=-\int_{R^{n-1}}(\gamma u_1^{(\nu)})\varphi(x',0)dx'-\int_{R_+^n}u_1^{(\nu)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}dx。$$

令$\nu\to\infty$，并利用γ：$H^1(R_+^n)\to L^2(R^{n-1})$的连续性，即得到(4.6)式。

类似地，在下半空间可以导出关于u_2的积分等式

$$\int_{R_-^n}\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\varphi dx=-\int_{R_-^n}u_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx,\quad 1\leqslant i\leqslant n-1, \tag{4.7}$$

$$\int_{R_-^n}\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\varphi dx=\int_{R^{n-1}}(\gamma u_2)\varphi(x',0)dx'$$

$$-\int_{R_-^n} u_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx。$$

将(4.6)与(4.7)两式相加，并利用条件 $\gamma u_1 = \gamma u_2$，即得

$$\int_{R_+^n} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \varphi dx + \int_{R_-^n} \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \varphi dx = -\int_{R^n} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx,$$

$$1 \leqslant i \leqslant n,$$

所以将上半空间为 $\frac{\partial u_1}{\partial x_i}$、下半空间为 $\frac{\partial u_2}{\partial x_i}$ 的两个 L^2 函数拼起来所得到的 L^2 函数恰为 u 的导数。从而 u 在 R^n 中的导数属于 $L^2(R^n)$，故 $u \in H^1(R^n)$。

证毕

注 1.4.5 利用局部化技巧即可得如下结论：若一光滑超曲面 Γ 将给定的区域 Ω 分成两个子区域 Ω_1 与 Ω_2，又若 u 在 Ω_1，Ω_2 中均为 H^1 函数，且在 Γ 上两侧的迹相等，那末 u 也是整个区域 Ω 中的 H^1 函数。

由此又容易得出，若 u 是区域 Ω 上的 H^1 函数，在 $\partial\Omega$ 上的迹 $\gamma u = 0$，则 $u \in H_0^1(\Omega)$。

下面的定理将在第二章中用到。

定理 1.4.6 设 $u \in H_0^1(R_+^n) \cap H^2(R_+^n)$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H_0^1(R_+^n) \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1。 \tag{4.8}$$

证明 由于 $u \in H^2(R_+^n)$，故

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(R_+^n),$$

由注 1.4.5 知只需指出

$$\gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0$$

对 $1 \leqslant i \leqslant n-1$ 成立。设 $\{u_\nu\}$ 是 $C^\infty(\bar{R}_+^n)$ 中的函数列，满足

$$u_\nu \to u(H^2(R_+^n)),$$

于是有 $\gamma_0 u_\nu \to \gamma_0 u(H^1(R^{n-1}))$，从而在 $L^2(R^{n-1})$中，

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\gamma_0 u_\nu \to \frac{\partial}{\partial x_i}\gamma_0 u = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

另一方面，由$\frac{\partial u_\nu}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i}(H^1(R_+^n))$，可得

$$\gamma_0\left(\frac{\partial u_\nu}{\partial x_i}\right) \to \gamma_0 \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad (L^2(R^{n-1}))。1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

显然，对 u_ν 成立

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\gamma_0 u_\nu = \gamma_0 \frac{\partial u_\nu}{\partial x_i},$$

故由极限的唯一性知

$$\gamma_0 \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0,$$

由此可知

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H_0^1(R_+^n).$$

证毕

最后，我们指出，利用迹定理可以将 Green 公式推广到广义函数的情形。这就是：

定理 1.4.7 设 Ω 如定理1.4.4 所述，$u \in H^1(\Omega)$，则

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}dx = \int_{\partial\Omega} u\cos(n, x_i)ds, \tag{4.9}$$

又当 $u \in H^2(\Omega)$且 $a_{ij}(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$时，

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)dx = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \nu}ds, \tag{4.10}$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum_j\left(\sum_i a_{ij}\cos(n, x_i)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

证明 我们只给出(4.9)式的证明，由于$u\in H^1(\Omega)$，则可找到$C^\infty(\bar{\Omega})$函数列$\{u_\nu\}$，使$u_\nu\to u(H^1(\Omega))$，又由迹定理知

$$u_\nu\to u(L^2(\partial\Omega)),$$

所以将u_ν所成立的Green公式

$$\int_\Omega \frac{\partial u_\nu}{\partial x_i}dx=\int_{\partial\Omega}u_\nu\cos(n,x_i)ds$$

两边取极限，即得(4.9)式，至于(4.10)式容易由同样方式推出。

证毕

§5 嵌入定理

本节中进一步讨论$H^m(\Omega)$函数的性质。我们将指出，当m充分大时，$H^m(\Omega)$函数是连续函数甚至可以按经典意义求导数，其可求导的阶数与m有关。这里所说的一个$H^m(\Omega)$函数是连续函数，其意义是说这个函数可以几乎处处等于一个连续函数。

定义 1.5.1 设Ω是R^n中的有界开集，若存在$\rho>0$，$\beta>0$，使对一切$y\in\bar{\Omega}$，都存在一个以y为顶点、半径为ρ、锥立体角为β的闭锥$K(y)$，使$K(y)\subset\bar{\Omega}$，则称Ω满足锥条件。

显然，若Ω有界且边界$\partial\Omega$光滑，则Ω满足锥条件。

定理 1.5.1 若Ω满足锥条件，$u\in C^m(\bar{\Omega})$，$m>\frac{n}{2}$，则u满足估计式

$$\sup_{\Omega}|u|\leqslant C\|u\|_{H^m(\Omega)}。\tag{5.1}$$

证明 以B_r记球心在原点、半径为r的球，设$g(t)$是$C_0^\infty(B_1)$函数，$g(t)\geqslant 0$，且在$B_{1/2}$上$g(t)=1$，又令

$$\tau(t)=g\left(\frac{t}{\rho}\right),$$

则存在常数 A_k，使

$$\left|\frac{d^k}{dt^k}\tau(t)\right|\leqslant\frac{A_k}{\rho^k},\ \rho>0。$$

若 $u\in C^m(\bar{\Omega})$，$2m>n$，对于任一点 $y\in\bar{\Omega}$，取 $K(y)$ 是锥条件中指定的锥，在 $K(y)$ 中沿着从顶点 y 出发的射线积分，有

$$\int_0^\rho \frac{d}{dr}(\tau(r)u(x))dr=-u(y),$$

式中 $r=|x-y|$，再在$K(y)$ 的锥角范围 Q 内积分，有

$$\int_Q\int_0^\rho \frac{d}{dr}(\tau(r)u(x))drd\omega=-u(y)\int_Q d\omega=-u(y)\cdot\beta。$$

将左端关于 β 的积分作分部积分 $m-1$ 次，有

$$\begin{aligned}|u(y)|&=\frac{1}{\beta}\left|\int_Q\left(r\frac{d}{dr}(\tau(r)u(x))\right|_0^\rho\right.\\&\qquad\left.-\int_0^\rho r\frac{d^2}{dr^2}(\tau(r)u(x)dr)\right)d\omega\Bigg|\\&=\frac{1}{\beta}\left|\int_Q\int_0^\rho r\frac{d^2}{dr^2}(\tau(r)u(x))drd\omega\right|\\&=\cdots\\&=\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{(m-1)!}\left|\int_Q\int_0^\rho r^{m-1}\frac{d^m}{dr^m}(\tau(r)u(x))drd\omega\right.\\&=\frac{1}{\beta(m-1)!}\left|\int_{K(y)}r^{m-n}\frac{d^m}{dr^m}(\tau u)dx\right|,\end{aligned}$$

利用 Schwarz 不等式，有

$$\begin{aligned}|u(y)|^2\leqslant&\left(\frac{1}{\beta(m-1)!}\right)^2\int_{K(y)}\left|\frac{d^m}{dr^m}(\tau u)\right|^2dx\\&\times\int_{K(y)}r^{2(m-n)}dx。\end{aligned}$$

当 $m>\frac{n}{2}$时，$\int_{K(y)}r^{2(m-n)}dx$ 收敛，所以有

$$|u(y)|^2 \leqslant C'\int_{K(x)}\left|\frac{d^m}{dr^m}(\tau u)\right|^2 dx。\qquad (5.2)$$

注意到

$$\left|\frac{d^m}{dr^m}(\tau u)\right|^2 = \left|\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{d^{m-k}}{dr^{m-k}}\tau\frac{d^k}{dr^k}u\right|^2$$

$$\leqslant C\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{\rho^{2(m-k)}}\left|\frac{d^k}{dr^k}u\right|^2,$$

$$\leqslant C'\sum_{|\alpha|\leqslant m}|\partial^\alpha u|^2,$$

将它代入(5.2)，即得(5.1)式。

证毕

注-1.5.1 利用定理1.5.1的结论又可得：若Ω满足锥条件，$u\in C^m(\bar{\Omega})$，$m>\frac{n}{2}+k$，则u满足估计式

$$\sup_{\bar{\Omega}}|\partial^k u|\leqslant C\|u\|_{H^m(\Omega)} \qquad (5.3)$$

定理 1.5.2（嵌入定理） 设Ω为R^n中的有界区域，具有光滑边界，$m>\frac{n}{2}+k$。则$H^m(\Omega)\subset C^k(\bar{\Omega})$，且恒同映照$i$：

$$H^m(\Omega)\to C^k(\bar{\Omega})$$

是连续的（i也称为**嵌入映照**）。

证明 由定理1.3.2知，存在$C^\infty(\bar{\Omega})$函数列$\{u^{(\nu)}\}$，使

$$u^{(\nu)}\to u(H^m(\Omega)),$$

于是由(5.3)知

$$\sup_{\bar{\Omega}}|\partial^k(u^{(\nu)}-u^{(\mu)})|\leqslant C\|u^{(\nu)}-u^{(\mu)}\|_{H^m(\Omega)}。\qquad (5.4)$$

由于$\{u^{(\nu)}\}$是$H^m(\Omega)$中的Cauchy序列，故$\{u^{(\nu)}\}$也是$C^k(\bar{\Omega})$中的Cauchy序列。从而$\{u^{(\nu)}\}$也按$C^k(\bar{\Omega})$的意义收敛。显然，按这两种意义收敛到的极限是同一元素，所以$u\in C^k(\bar{\Omega})$。同时，

(5.3)表示 $H^m(\Omega)$ 到 $C^k(\bar{\Omega})$ 的嵌入映照是连续映照。

证毕

注 1.5.2 若 Ω 仅满足锥条件，则每一个 $H^m(\Omega)$ 函数 u 几乎处处等于一个 $C^k(\Omega)$ 函数，且 $\sup\limits_{|\alpha|\le k}|D^\alpha u|$ 是一致有界的。因为由锥条件知对每一点 $y\in\bar{\Omega}$，有以 β 为锥角，以 ρ 为半径的锥

$$K(y)\subset\bar{\Omega}。$$

取 $\rho_1<\rho$，通过坐标轴的适当移动，不妨设

$$K_1=\left\{x;\, x_n>0,\sum_{i=1}^{n-1}|x_i|<\delta x_n,\, |x|<\rho_1\right\}\subset K=K(y),$$

式中 δ 为一个仅依赖于 ρ 与 β 的正常数，作

$$u_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}\int_k \alpha\left(\frac{x_1-x_1'}{\varepsilon}\right)\cdots\alpha\left(\frac{x_{n-1}-x_{n-1}'}{\varepsilon}\right)\alpha$$

$$\times\left(\frac{x_n-x_n'+(n/\delta+2)\varepsilon}{\varepsilon}\right)u(x')dx', \qquad (5.5)$$

其中 α 为§1例1中引入的函数，则当 ε 充分小时，只要 $x\in K_1$，(5.5)式中的被积函数的支集在 K 中，从而积分有意义。又由于 n，δ 都为固定的数，所以

$$u_\varepsilon(x)\in C^\infty(\bar{K}_1),$$

$$u_\varepsilon(x)\to u(x)\,(H^m(K_1))。$$

利用定理1.5.2知 $u(x)\in C^k(\bar{K}_1)$。所以 $u\in C^k(\Omega)$，且由于在 K_1 中 u 的 C^k 模可以用一个仅与 ρ_1 与 β 有关的常数乘以 $\|u\|_{H^m(K_1)}$ 来控制，故得 $\sup\limits_{|\alpha|\le k}|D^\alpha u|$ 在 Ω 中一致有界。

证毕

当我们在广义函数类中讨论偏微分方程的求解时，嵌入定理提供了一条从广义函数解到达经典解的途径。所以，这个定理对于近代偏微分方程理论来说是十分重要的。下面我们给出 $H^{m,p}$ 空间中嵌入定理的一种形式，其证明可参见[3]，[4]。

定理 1.5.3 设$\Omega \subset R^n$具有光滑边界，$u \in H^{m,p}(\Omega)$。则

1) 当$1 \leqslant p < \frac{n}{m}$时，设$p'$满足

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n},$$

则
$$H^{m,p}(\Omega) \subset L^{p'}(\Omega),$$
并且存在常数$C>0$，使
$$\|u\|_{L^{p'}(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{H^{m,p}(\Omega)} \quad \forall u \in H^{m,p}(\Omega)。\tag{5.6}$$

2) 当$\frac{n}{m} < p \leqslant \infty$，$m \geqslant 1$时，则

$$H^{m,p}(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega}),$$
且存在常数$C>0$，使得
$$\sup_{\Omega} |u(x)| \leqslant C\|u\|_{H^{m,p}(\Omega)} \quad \forall u \in H^{m,p}(\Omega)。\tag{5.7}$$

下面我们证明另一类嵌入定理，也称紧嵌入定理。在§3我们已知，当$m_1 > m_2 \geqslant 0$时，$H^{m_1}(\Omega) \subset H^{m_2}(\Omega)$，下面我们将证明，在$\Omega$为有界的条件下，恒同映照$i$：$H^{m_1}(\Omega) \to H^{m_2}(\Omega)$不仅是连续的，而且是紧的。

引理 1.5.1 设Q是R^n中边长为d的立方体$[a_1, \cdots, a_n; b_1, \cdots, b_n]$，$u \in C^1(\bar{Q})$，则

$$\|u\|^2_{L^2(Q)} \leqslant d^{-n}\left(\int_Q u dx\right)^2 + \frac{nd^2}{2}\sum_{j=1}^n \|\partial_j u\|^2_{L^2(Q)}。\tag{5.8}$$

证明 对任意$x, y \in Q$，我们有

$$u(x) - u(y) = -\sum_{j=1}^n \int_{x_j}^{y_j} \partial_j u(y_1, \cdots, y_{j-1}, s, x_{j+1}, \cdots, x_n) ds。$$

两边平方，并利用Schwarz不等式得

$$u^2(x) + u^2(y) - 2u(x)u(y)$$
$$\leqslant nd\sum_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} (\partial_j u)^2(y_1, \cdots, y_{j-1}, s, x_{j+1}, \cdots, x_n) ds。$$

关于$x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n$积分，即有

$$2d^n\|u\|^2_{L^2(Q)}\leqslant 2\left(\int_Q udx\right)^2+nd^{n+2}\sum_{j=1}^n\|\partial_j u\|^2_{L^2(Q)},$$

此即(5.8)式。

证毕

注 1.5.2 通过极限过程可知，当$u\in H^1(Q)$时(5.8)仍然成立。

定理 1.5.4 设Ω为R^n中的有界区域，且具有光滑边界，则$H^1(\Omega)\to L^2(\Omega)$的嵌入映照是紧映照。

证明 我们需要证明的是，若$\{u^{(\nu)}\}$为$H^1(\Omega)$中的有界序列，则其中可选取子序列在$L^2(\Omega)$中收敛。

先设对每个ν，$u^{(\nu)}\in H^1_0(\Omega)$，则$u^{(\nu)}$可作零延拓到含$\Omega$的立方体$Q$中，且仍保持$u^{(\nu)}\in H^1(Q)$。不妨设$Q$的每边长度为1，记$M=\sup\limits_{\nu}\{\|u^{(\nu)}\|_{H^1}\}$，对任意的$\varepsilon>0$，取$N$使$2nM^2/N^2<\varepsilon$，然后将立方体$Q$划分成$N^n$个小立方体$Q_k(k=1,\cdots,N^n)$。由于$L^2$中的有界集是弱紧的，所以从$\{u^{(\nu)}\}$中可以选取子序列使其弱收敛，不妨仍以$\{u^{(\nu)}\}$记此子序列，于是可找到整数$\nu_0$，使

$$\left|\int_{Q_k}(u^{(\nu)}-u^{(\mu)})dx\right|^2\leqslant\frac{\varepsilon}{2N^{2n}},\quad 1\leqslant k\leqslant N^n,\ \nu,\mu\geqslant\nu_0. \quad (5.9)$$

对于函数$u^{(\nu)}-u^{(\mu)}$应用引理1.5.1，并注意到(5.9)式，有

$$\|u^{(\nu)}-u^{(\mu)}\|^2_{L^2(Q_k)}\leqslant N^n\cdot\frac{\varepsilon}{2N^{2n}}+\frac{n}{2N^2}\sum_{j=1}^n\|\partial_j(u^{(\nu)}-u^{(\mu)})\|^2_{L^2(Q_k)}.$$

再关于k相加，可得

$$\|u^{(\nu)}-u^{(\mu)}\|^2_{L^2(Q)}\leqslant N^{2n}\cdot\frac{\varepsilon}{2N^{2n}}+\frac{n}{2N^2}\sum_{j=1}^n\|\partial_j(u^{(\nu)}-u^{(\mu)})\|^2_{L^2(Q)}<\varepsilon,$$

所以$u^{(\nu)}$是$L^2(Q)$中的Cauchy序列。

今若 $u^{(\nu)}$ 为一般的 $H^1(\Omega)$ 函数，由定理1.4.2知 $u^{(\nu)}$ 可延拓为 $H^1(R^n)$ 函数 $\tilde{u}^{(\nu)}$。仍作立方体 Q 使 $\Omega\subset\subset Q$，作截断函数 $\eta\in C_0^\infty(Q)$，且使 η 在 Ω 上恒等于1，则 $\eta\tilde{u}^{(\nu)}$ 就是 $H_0^1(Q)$ 函数，且 $\|\eta\tilde{u}^{(\nu)}\|_{H^1(Q)}$ 有界，运用前面已证得的结果知 $\{\eta\tilde{u}^{(\nu)}\}$ 中可选取子序列，使其在 $L^2(Q)$ 中收敛。但 $\eta\tilde{u}^{(\nu)}$ 是 $u^{(\nu)}$ 在 Q 中的延拓，从而知 $\{u^{(\nu)}\}$ 中有子序列在 $L^2(\Omega)$ 中收敛。

证毕

注 1.5.3 由定理1.5.4立即可得，在关于 Ω 同样的假定下，只要 $m\geqslant 1$，从 $H^m(\Omega)\to H^{m-1}(\Omega)$ 的嵌入映照是紧映照。

事实上，定理1.5.4说明上述命题对 $m=1$ 成立。今若此命题对 m 成立，且若 $\{u^{(\nu)}\}$ 为 $H^{m+1}(\Omega)$ 中的有界集，则 $\{u^{(\nu)}\}$ 及 $\{\partial_j u^{(\nu)}\}(j=1,\cdots,n)$ 都是 $H^m(\Omega)$ 中的有界集，从而通过有限次选取子序列的过程可以得一子序列，使其本身及其一阶导数均在 $H^{m-1}(\Omega)$ 中收敛。而这正说明该子序列按 $H^m(\Omega)$ 范数收敛，从而上述命题对 $m+1$ 也成立，故由归纳法知注1.5.3对一切正整数 m 成立。

关于嵌入定理与紧嵌入定理还有许多重要的结果，有兴趣的读者可参阅[3]。

第二章　椭圆型方程

从本章起，我们将把第一章中建立的广义函数与 Sobolev 空间的理论应用于偏微分方程的研究，即介绍二阶线性方程的一些基本结果，同时介绍几种不同类型的方法与技巧。

§1　边值问题的广义解

设 Ω 为 R^n 中的有界区域，具有光滑的边界。本章中我们将在 Ω 上讨论如下形式的**椭圆型方程的边值问题**：

$$\begin{cases} Lu=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=f, & (1.1)\\ u|_{\partial\Omega}=0 & (1.2)\end{cases}$$

式中 a_{ij}、b_i、c 为变量 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ 的 $C^\infty(\bar{\Omega})$ 实函数（这个要求一般可以减弱，但在本书中我们并不注重于这一点）。系数 a_{ij} 还满足 $a_{ij}=a_{ji}$ 以及**椭圆性条件**

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \quad \xi \neq 0. \tag{1.3}$$

式中 α 是一个与 x 无关的常数。条件 (1.2) 称为齐次 Dirichlet 条件。边值问题 (1.1)(1.2) 称为 Dirichlet 边值问题。

在偏微分方程的经典理论中，问题 (1.1)，(1.2) 的解必须在 $C^2(\Omega)\cap C^0(\bar{\Omega})$ 中寻找，引进广义函数空间的工具以后，我们就可以将这一要求降低。然而在怎样的广义函数空间中来讨论问题 (1.1)，(1.2) 较为合适呢？让我们先来看一个例子。

如我们在绪论中所提到的那样，当考察一平面区域 Ω 上具有给定边界位移的薄膜平衡问题时，需要求泛函

$$J[u]=\int_{\Omega}\left[\frac{1}{2}(u_x^2+u_y^2)-uf\right]dxdy \qquad (1.4)$$

的极小值。泛函（1.4）的物理意义就是薄膜所具有的能量。容易证明，在边界 $\partial\Omega$ 上取零值的 $C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$ 函数类中 $J[u]$ 取极小值的问题与 Poisson 方程 $-\Delta u=f$ 的求解是等价的。事实上，设 u 是使 $J[u]$ 取极小值的元素，则对任一 $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$，

$$\frac{d}{d\varepsilon}(J[u+\varepsilon\varphi])\Big|_{\varepsilon=0}=0。 \qquad (1.5)$$

从而得

$$\int_{\Omega}(u_x\varphi_x+u_y\varphi_y-f\varphi)dxdy=0,\quad \forall\varphi\in C_c^\infty(\Omega)。 \qquad (1.6)$$

或

$$\int_{\Omega}(\Delta u+f)\varphi dxdy=0,\quad \forall\varphi\in C_c^\infty(\Omega)。 \qquad (1.7)$$

由 $C_c^\infty(\Omega)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中的稠密性，即可推出

$$-\Delta u=f。 \qquad (1.8)$$

反之，若 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$ 满足（1.7）与边界条件 $u|_{\partial\Omega}=0$，那么，对任一在边界上取零值的 $C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$ 的函数 φ，

$$J[u+\varepsilon\varphi]=J[u]+\varepsilon\int_{\Omega}(u_x\varphi_x+u_y\varphi_y-f\varphi)dxdy$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{\Omega}(\varphi_x^2+\varphi_y^2)dxdy。$$

利用分部积分法，易知（1.6）成立，所以

$$J[u+\varepsilon\varphi]\geqslant J[u]\ 。$$

这就说明 $J[u]$ 取极小值。

为推广解的概念，我们可以把使泛函（1.4）取到极小值的元素视为原始物理问题的解。从 $J[u]$ 的表达式来看，只要 u 及其导数平方可积，它就有意义。结合 u 在边界上取零值的要求，我们

就应当在 $H_0^1(\Omega)$ 中考虑泛函 $J[u]$ 的极值。根据前面从 (1.5) 到 (1.7) 的推导过程可知，在 $H_0^1(\Omega)$ 中使泛函 $J[u]$ 取极小值的元素按广义函数的意义满足方程 (1.8)。

这个例子启示我们，在 Sobolev 空间 $H^1(\Omega)$中讨论问题 (1.1)，(1.2) 是较合适的。此时，若 u 为问题 (1.1)(1.2) 的解，则表示按广义函数意义(1.1) 成立，(1.2)式也应当理解为广义函数在边界 $\partial\Omega$ 上的迹为零，且边界条件 (1.2) 可以用 $u\in H_0^1(\Omega)$ 表示。又当 $u\in H^1(\Omega)$ 时，$Lu\in H^{-1}(\Omega)$，所以问题 (1.1)(1.2) 的合适提法是：对于 $f\in H^{-1}(\Omega)$，寻求 $H_0^1(\Omega)$ 函数 u，使它按广义函数的意义满足 (1.1)。这种解也称为**广义解**。

与偏微分方程的经典理论相仿，在偏微分方程的近代理论中解的存在性和唯一性都是需要研究的最基本问题。另一个基本问题是解的光滑性问题，即在某些附加条件下，例如 (1.1) 中函数 f 具较高的光滑性时，解将有怎样的光滑性？如果用 Sobolev 空间作为光滑性的度量，则问题化为，若 f 属于某Sobolev空间$H^{m_1}(\Omega)$ 时，u 属于怎样的空间 $H^{m_2}(\Omega)$？利用第一章中证明的嵌入定理可知，若 $u\in H^{m_2}(\Omega)$，而 $m_2>\frac{n}{2}+2$ 时，u 就具有二阶连续偏导数，于是按广义函数意义的解 u 就是古典解。所以，关于解的光滑性的研究常可用来证实广义解就是古典解，当然它还有独立的意义。此外，在偏微分方程的近代理论中也还常研究解的其他性质以及求解方法等。在涉及到这些问题时我们再作详细说明。

边界条件 (1.2) 还可以改成非齐次的，即 $u|_{\partial\Omega}=g$ 的形式。这里 g 是在边界 $\partial\Omega$ 上给定的一个函数。这个问题的一种处理方法是将它化成具有齐次边界条件的问题。若在边界 $\partial\Omega$ 上定义的函数 g 可以延拓成为 $H^1(\Omega)$ 函数，并且仍以 g 记之，则 $\bar{u}=u-g$就

将满足

$$\begin{cases} L\tilde{u}=f-Lg, & (1.9) \\ \tilde{u}|_{\partial\Omega}=0。 & (1.10) \end{cases}$$

由于$f-Lg\in H^{-1}(\Omega)$，所以它就是前面所述的问题（1.1)，(1.2) 的情形。这里需要注意的是，$H^1(\Omega)$ 函数在边界上的迹是一个$H^{1/2}$函数。所以为使定义在$\partial\Omega$上的函数g延拓成一个$H^1(\Omega)$函数，g必需是$H^{1/2}(\partial\Omega)$的函数。

如果讨论方程（1.2）的 Neumann 问题，边界条件应当改为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega}=0 \qquad (1.11)$$

的形式。这里$\frac{\partial}{\partial\nu}$表示沿$\partial\Omega$的余法向求导数，即

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\cos(nx_i)\frac{\partial u}{\partial x_j}。$$

如果我们限定在$H^1(\Omega)$中讨论（1.1)(1.11）的解，则（1.11）式就不能按广义函数的迹来理解。至少在尚未进一步研究解的光滑性以前，仅按照$u\in H^1(\Omega)$的条件，无法赋予$\left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}$以确切的意义。所以我们得利用 Green 公式将问题的提法作些改变。

若$u\in H^2(\Omega)$，$v\in H^1(\Omega)$，则利用 Green 公式可得

$$(-Lu,\ v)_{L^2(\Omega)}=a(u,\ v)-(\frac{\partial u}{\partial\nu},\ v)_{L^2(\partial\Omega)}。 \qquad (1.12)$$

式中$a(u,\ v)$是u，v的一个双线性形式，即

$$a(u,\ v)=\int_\Omega\Big[\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}(-b_i+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j})\frac{\partial u}{\partial x_i}\bar{v}$$

$$-cu\bar{v}\Big]dx。$$

因此，当u满足（1.1）式时，可得

$$(-f,\ v)_{L^2(\Omega)}=a(u,\ v)-(\frac{\partial u}{\partial \nu},\ v)_{L^2(\partial\Omega)}。\qquad (1.13)$$

如果 u 又满足边界条件 (1.11)，则有

$$a(u,\ v)=-(f,v)_{L^2(\Omega)}\quad ,\qquad (1.14)$$

反之，如果 $u\in H^2(\Omega)$，且对任一 $v\in H^1(\Omega)$ 满足 (1.14) 式，则逆此过程可以推得 u 满足方程 (1.1) 以及边界条件 (1.11)。注意到在 (1.14) 式中仅出现 u 的一阶广义导数，当 $u\in H^1(\Omega)$时，说到 (1.14) 式成立与否是有意义的。于是如果 $u\in H^1(\Omega)$，且对于任一 $H^1(\Omega)$ 函数 v 成立 (1.14) 式，就称 u 是 Neumann 问题 (1.1)(1.11) 的解。显然，当 $u\in H^2(\Omega)$时，这样定义的 Neumann 问题的解在边界 $\partial\Omega$ 上的导数$\frac{\partial u}{\partial \nu}$按广义函数迹的意义满足 (1.11) 式。

对于第三边值问题在广义函数框架中的叙述可相仿地给出。如果讨论边界条件为

$$(\frac{\partial u}{\partial \nu}+\sigma u)|_{\partial\Omega}=0\qquad (1.15)$$

的第三边值问题，则利用类似的推导可知，边值问题 (1.1)(1.15) 的解 u 应当定义为 $H^1(\Omega)$ 中满足

$$a(u,\ v)+(\sigma u,\ v)_{L^2(\partial\Omega)}=-(f,\ v)\quad \forall v\in H^1(\Omega)\quad (1.16)$$

的函数。且易知，当 $u\in H^2(\Omega)$ 时，它就按迹的意义满足 (1.15) 式。

顺便指出，对于第一边值问题 (1.1) (1.2)，也可以利用双线性形式 $a(u,\ v)$ 来规定解：若 $u\in H_0^1(\Omega)$，且满足

$$a(u,\ v)=-(f,\ v)\ ,\ \forall v\in H_0^1(\Omega),\qquad (1.17)$$

则称 u 为第一边值问题(1.1)(1.2)的解。显然它与前面已叙述的解的概念是一致的。(1.17)与(1.14)(1.16)之区别是：在(1.17)中

仅要求 $f\in H^{-1}(\Omega)$，$u\in H_0^1(\Omega)$；而在(1.14)(1.16)中 $f\in L^2(\Omega)$。

本章中，我们主要讨论二阶椭圆型方程 Dirichlet 问题解的存在性、唯一性、正则性以及有关特征值的问题。

§ 2　Gårding 不等式

设 L 为上节中给定的椭圆型算子，现在来建立与 L 有关的两个先验估计式，它在边值问题(1.1)(1.2)的研究中起着重要作用。

定理 2.2.1（Gårding **不等式**）设 Ω，L 如前所定义，则存在正常数 C_1，C_2，使对一切 $C_0^\infty(\Omega)$ 函数 u 成立。

$$\operatorname{Re}(-Lu,\ u)_{L^2(\Omega)}\geqslant C_1\|u\|_1^2-C_2\|u\|^2。\tag{2.1}$$

证明　利用 Green 公式知道

$$(-Lu,\ u)_{L^2(\Omega)}=a(u,\ u)-\left(\frac{\partial u}{\partial \nu},\ u\right)_{L^2(\partial\Omega)}$$

$$=a(u,\ u)。$$

据双线性形式 $a(u,\ v)$ 的表达式，有

$$a(u,\ u)=\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar u}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}-b_i\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\bar u-c|u|^2\right]dx$$

$$\geqslant\int_\Omega\left[\alpha\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2+\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}-b_i\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\bar u-c|u|^2\right]dx$$

$$\geqslant\alpha\|\operatorname{grad}u\|^2-C'\|\operatorname{grad}u\|\,\|u\|-C''\|u\|^2。$$

又利用不等式 $2ab\leqslant\varepsilon a^2+\dfrac{1}{\varepsilon}b^2$，我们有

$$2\|\operatorname{grad}u\|\,\|u\|\leqslant\frac{\alpha}{2C'}\|\operatorname{grad}u\|^2+\frac{2C'}{\alpha}\|u\|^2.$$

从而可得

$$\mathrm{Re}\,(-Lu,\ u)_{L^2(\Omega)}=a(u,u)\geqslant\frac{\alpha}{2}\|\mathrm{grad}u\|^2-\left(\frac{2(C')^2}{\alpha}+C''\right)\|u\|^2。$$

由此即得 (2.1) 式。

证毕

定理 2.2.2 对于椭圆算子 L，存在常数 C 与 Λ，使当 $\mathrm{Re}\lambda>\Lambda$ 时．对一切$C_c^\infty(\Omega)$ 函数 u 成立

$$\|-Lu+\lambda u\|_{-1}\geqslant C\|u\|_1。\tag{2.2}$$

证明 由 (2.1) 式知

$$\mathrm{Re}(-Lu,\ u)_{L^2(\Omega)}\geqslant C_1\|u\|_1^2-C_2\|u\|^2$$

故取 $\Lambda=C_2$，在$\mathrm{Re}\lambda>\Lambda$ 时

$$\mathrm{Re}(-Lu+\lambda u,\ u)_{L^2(\Omega)}\geqslant C_1\|u\|_1^2。$$

由 Sobolev 空间的性质知

$$|(-Lu+\lambda u,\ u)_{L^2(\Omega)}|\leqslant\|(L-\lambda)u\|_{-1}\|u\|_1$$

由此即得 (2.2) 式。

证毕

注 2.2.1 有时我们也称 (2.1) 与 (2.2) 分别为椭圆算子的第一、第二基本不等式；又当 $u\in H_0^1(\Omega)$ 时，通过极限过程易知这两个基本不等式仍成立。

定理 2.2.3 对于椭圆算子 L，当 $m>0$ 时，存在常数$C_1^{(m)}$和$C_2^{(m)}$，使对一切 $C_c^\infty(\Omega)$ 函数 u 成立（从而 $H_0^{m+1}(\Omega)$ 函数也成立）

$$\mathrm{Re}(-Lu,\ u)_m\geqslant C_1^{(m)}\|u\|_{m+1}^2-C_2^{(m)}\|u\|^2。\tag{2.3}$$

又存在正常数 $C^{(m)}$与 $\Lambda^{(m)}$，使对一切 $\mathrm{Re}\lambda>\Lambda^{(m)}$成立

$$\|-Lu+\lambda u\|_{m-1}\geqslant C^{(m)}\|u\|_{m+1}。\tag{2.4}$$

证明 我们就 $m=1$ 的情形证明之。利用 (2.1) 式知对任意 $j=1,\cdots,n$，

$$\mathrm{Re}[-L(\partial_j u),\ \partial_j u]\geqslant C_1\|\partial_j u\|_1^2-C_2\|\partial_j u\|^2,\tag{2.5}$$

其中 $L(\partial_j u)=\partial_j Lu-\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j}\partial_{ik}^2 u-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial b_i}{\partial x_j}\partial_i u-\frac{\partial c}{\partial x_j}u$，所以

$$\mathrm{Re}(-\partial_j Lu,\ \partial_j u)\geqslant\mathrm{Re}[-L(\partial_j u),\ \partial_j u]-C\|u\|_2\|u\|_1。\quad(2.6)$$

将所有的 $(-\partial_j Lu,\ \partial_j u)$ 关于 j 作和，再加上 $(-Lu,\ u)$，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(-Lu,\ u)_1&\geqslant\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Re}(-L(\partial_j u),\ \partial_j u)-C'\|u\|_2\|u\|_1-C_2\|u\|^2\\&\geqslant C_1\sum_{j=1}^{n}\|\partial_j u\|_1^2-nC_2\|u\|_1^2-C'\|u\|_2\|u\|_1-C_2\|u\|^2\\&\geqslant\frac{C_1}{2}\|u\|_2^2-C_3(\|u\|_1^2+\|u\|^2)。\end{aligned}$$

因

$$\begin{aligned}\|u\|_1^2&=\sum_{j=1}^{n}(\partial_j u,\ \partial_j u)+(u,\ u)=((1-\Sigma\partial_j^2)u,\ u)\\&\leqslant\|u\|_2\|u\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2C_3}\|u\|_2^2+\frac{C_3}{2\varepsilon}\|u\|^2,\end{aligned}$$

故在 ε 充分小时可得 (2.3) 式。

若取 $\Lambda^{(1)}=C_2^{(1)}$，那么 $\forall u\in C_c^\infty(\Omega)$，对任一 λ，$\mathrm{Re}\lambda>\Lambda^{(1)}$，就有

$$\mathrm{Re}(-Lu+\lambda u,\ u)_1\geqslant C_1^{(1)}\|u\|_2^2。\quad(2.7)$$

而左端经分部积分后为

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}(-Lu+\lambda u,\ (I-\sum_{j=1}^{n}\partial_j^2)u)\\&\leqslant\|(L-\lambda)u\|\ \|u\|_2。\end{aligned}$$

代入 (2.7) 式不难得到 (2.4) 式中 $m=1$ 的情形。

我们将 $m>1$ 时 (2.3) 式以及 (2.4) 式的证明留给读者。

证毕

注 2.2.2 若 Ω 是无界的区域，又当 Gårding 不等式的证明中所涉及的系数及其导数在 Ω 上一致有界，(1.3) 在 $\bar{\Omega}$ 上成立，则 (2.1) 仍成立。

定理 2.2.4 对于如前给定的Ω与椭圆算子L,存在常数Λ,使当$\mathrm{Re}\lambda>\Lambda$时,方程$(-L+\lambda)u=f$对任一$f\in H^{-1}(\Omega)$存在唯一的$H_0^1(\Omega)$解。

证明 由(2.2)式知,当Λ充分大且$\mathrm{Re}\lambda>\Lambda$时,

$$\|-Lu+\lambda u\|_{-1}\geqslant C\|u\|_1$$

对于一切$H_0^1(\Omega)$函数u均成立,于是当$-Lu+\lambda u=0$时,必有$u=0$。由此立刻可得解的唯一性。

为证明存在性,作L的形式共轭算子L^*,它按下式定义

$$L^*v=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(a_{ij}v)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_iv)+cv, \qquad (2.8)$$

则L^*与L具相同的二阶项,它也满足椭圆性条件,故由定理2.2可适当改变上面的C、Λ,使当$\mathrm{Re}\lambda>\Lambda$时,

$$\|(-L^*+\lambda)v\|_{-1}\geqslant C\|v\|_1 \qquad (2.9)$$

对一切$v\in C_c^\infty(\Omega)$成立,于是当$f\in H^{-1}(\Omega)$时,对$\mathrm{Re}\lambda>\Lambda$有

$$|(f,\ v)|\leqslant\|f\|_{-1}\|v\|_1\leqslant C\|(-L^*+\lambda)v\|_{-1}。 \qquad (2.10)$$

算子$-L^*+\lambda$将$C_c^\infty(\Omega)$空间映照到$H^{-1}(\Omega)$中的线性子集B,B可以表示成$\{w\in H^{-1}(\Omega),\ w=(-L^*+\lambda)v,\ v\in C_c^\infty(\Omega)\}$。在$B$上定义一个线性泛函$l_f(w)=(f,\ (-L^*+\lambda)^{-1}w)=(f,\ v)$,则(2.10)式表示$l_f(w)$是线性连续泛函,利用 Hahn-Banach 定理将此泛函扩张到$H^{-1}(\Omega)$全空间,并利用泛函表现定理,就可以找到一个元素$u\in(H^{-1}(\Omega))'=H_0^1(\Omega)$,使

$$(f,v)=l_f(w)=(u,\ w)。 \qquad (2.11)$$

此即

$$(f,v)=(u,(-L^*+\lambda)v)=(-Lu+\lambda u,\ v),\quad\forall v\in C_c^\infty(\Omega).$$

从而说明u为$-Lu+\lambda u=f$的$H_0^1(\Omega)$解。

证毕

注 2.2.3 按上节的说明可知,定理 2.2.4 中得到的u即

为 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -Lu+\lambda u=f, \\ u|_{\partial\Omega}=0 \end{cases} \tag{2.12}$$

的解。

§3　边值问题解的正则性

本节将要说明定理 2.2.4 所得到的Dirichlet 问题之解有较好的正则性。确切地说，当右端 $f\in H^S(\Omega)$ $(S\geqslant 0)$，则解 $u\in H^{S+2}(\Omega)$。这是偏微分方程理论中的一个基本定理。本节中只讨论 S 为非负整数的情形。该定理的证明基于局部化技术和泛函分析的某些结论。由于证明较长，我们先作些准备。

引理 2.3.1　设 H_1，H_2 是 Hilbert 空间，$T_\lambda(\lambda>0)$ 是一 $H_1\longrightarrow H_2$ 的线性连续算子，满足

(1) 存在一个与 λ 无关的常数 C，使得 $\|T_\lambda\|\leqslant C$，$\forall_\lambda>0$；

(2) 存在 H_1 中的稠密子集 $\mathscr{D}$，使 $\forall x\in\mathscr{D}$，$\lim\limits_{\lambda\to 0}T_\lambda x$ 存在，

则存在一个 $T\in B(H_1, H_2)$，使得 $\lim\limits_{\lambda\to 0}T_\lambda x=Tx$，$\forall x\in H_1$。

证明　事实上，对任意的 $y\in H_1$，极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}T_\lambda y$ 存在。这是因为

$$\begin{aligned}\|T_\lambda y-T_{\lambda'}y\|&\leqslant\|T_\lambda y-T_\lambda x\|+\|T_\lambda x-T_{\lambda'}x\|+\|T_{\lambda'}x-T_{\lambda'}y\|\\&\leqslant 2C\|y-x\|+\|T_\lambda x-T_{\lambda'}x\|,\end{aligned}$$

故对任一 $\varepsilon>0$，可选取 $x\in\mathscr{D}$，使 $\|y-x\|\leqslant\frac{\varepsilon}{4C}$，而对此固定的 x，选取 λ_0，使当 λ、$\lambda'\leqslant\lambda_0$ 时，$\|T_\lambda x-T_{\lambda'}x\|<\frac{\varepsilon}{2}$，从而 $\|T_\lambda y-T_{\lambda'}y\|<\varepsilon$，这就说明 $\lim\limits_{\lambda\to 0}T_\lambda y$ 存在。再定义算子

$$T: H_1 \ni y \longmapsto \lim_{\lambda \to 0} T_\lambda y = Ty \in H_2,$$

则T满足引理的要求。

证毕

定理 2.3.1 可分的 Hilbert 空间H的单位球是弱紧的，即若$\{x_n\} \subset H$，且$\|x_n\| \leqslant 1$，则存在一子列x_{n_k}和$x_0 \in H$，使得

$$\lim_{k \to \infty}(y,\ x_{n_k}) = (y,\ x_0),\ \forall y \in H。\tag{3.1}$$

证明 设$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$是H中的稠密子集，那么

$$|(y_k,\ x_n)| \leqslant \|y_k\| \quad (k=1,\ \cdots)。\tag{3.2}$$

固定$k=1$，存在子列$\{x_{1,n}\} \subset \{x_n\}$，使

$$\lim_{n \to \infty}(y_1,\ x_{1,n}) = C_1。$$

类似于(3.2)式，由$|(y_2, x_{1,n})| \leqslant \|y_2\|$可找到$\{x_{1,n}\}$的子列$\{x_{2,n}\}$，使

$$\lim_{n \to \infty}(y_2,\ x_{2,n}) = C_2。$$

以此类推，对每个整数k，可找到序列$\{x_{k,n}\}$，使

$$\cdots \subset \{x_{k,n}\} \subset \{x_{k-1,n}\} \subset \cdots \subset \{x_{1,n}\} \subset \{x_n\}，且$$

$$\lim_{n \to \infty}(y_k,\ x_{k,n}) = C_k,$$

因而对序列$\{x_{n,n}\}$成立

$$\lim_{n \to \infty}(y_k, x_{n,n}) = C_k,$$

式中k为任意正整数。记$l_n(y) = (y,\ x_{n,n})$，则l_n是H上的有界线性泛函，且$\|l_n\| \leqslant 1$，它在H中的一稠密子集$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$上收敛。由引理2.3.1得知，存在H上的有界线性泛函l，使得$l(y) = \lim_{n \to \infty}(y,\ x_{n,n})$对任一$y \in H$成立。再由 Riesz 定理知存在$x_0 \in H$，使$l(y) = (y, x_0)$。这意味着$\{x_{n,n}\}$弱收敛于$x_0$。

证毕

记$R_+^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in R^n \mid x_n > 0\}$。若$u \in H(R_+^n) = L^2(R_+^n)$，

对于非零实数 h，定义

$$\tau_h u = u(x_1+h, x_2, \cdots, x_n)。$$

我们有

引理 2.3.2 若 $u, v \in H(R_+^n)$，则

$$(\tau_h u, v) = (u, \tau_{-h} v), \tag{3.3}$$

$$\|\tau_h u\| = \|u\|。 \tag{3.4}$$

证明 通过变量代换 $x_1+h \to x_1$，易得

$$\int_{R_+^n} u(x_1+h, \cdot)\bar{v}(x_1, \cdot)dx = \int_{R_+^n} u(x_1, \cdot)\bar{v}(x_1-h, \cdot)dx,$$

此即 (3.3) 式。又在此式中取 $v=\tau_h u$ 就立即得 (3.4)。

证毕

引理 2.3.3 若 $u \in H^1(R_+^n)$，记 $\nabla_h u = (\tau_h u - u)/h$，则

$$\|\nabla_h u\| \leqslant \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|。 \tag{3.5}$$

证明 设 $u \in C^\infty(\bar{R}_+^n) \cap H^1(R_+^n)$，那么

$$\nabla_h u = \frac{1}{h}\int_{x_1}^{x_1+h} \frac{\partial u}{\partial x_1}(s, \cdot)ds$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1+\lambda h, \cdot)d\lambda。$$

所以

$$\int_{R_+^n} |\nabla_h u|^2 dx \leqslant \int_0^1 d\lambda \int_{R_+^n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, \cdot)\right\|^2 dx,$$

即

$$\|\nabla_h u\|^2 \leqslant \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|^2。 \tag{3.6}$$

对于任意的 $u \in H^1(R_+^n)$，存在 $u_n \in C^\infty(\bar{R}_+^n) \cap H^1(R_+^n)$，使 $\|u_n - u\|_1 \to 0$。从而

$$\left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|\longrightarrow 0,\ \left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\right\|\longrightarrow\left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|\quad (n\to\infty)。\quad (3.7)$$

另一方面，对固定的 $h\neq 0$，

故
$$\|\nabla_h(u_n-u)\|\leqslant\frac{2}{h}\|u_n-u\|\to 0\quad (n\to\infty)。$$

$$\|\nabla_h u_n\|\longrightarrow\|\nabla_h u\|\quad (n\to\infty)。\quad (3.8)$$

结合 (3.6)、(3.7)、(3.8) 及通过极限可知，对任何 $u\in H^1(R^n_+)$，(3.5) 均成立。

证毕

引理 2.3.4 若 $u\in H^1(R^n_+)$，则 $\nabla_h u\longrightarrow\frac{\partial u}{\partial x_1}(L^2(R^n_+))$。

证明 由 (3.5) 知，∇_h 是 $H^1(R^n_+)$ 到 $L^2(R^n_+)$ 的线性连续算子. 且 $\forall h>0$，有 $\|\nabla_h\|\leqslant 1$。此外，不难验证，

$$\nabla_h u\longrightarrow\frac{\partial u}{\partial x_1}(L^2(R^n_+)),\ \forall u\in C^\infty_c(\bar{R}^n_+)。$$

而 $C^\infty_c(\bar{R}^n_+)$ 在 $H^1(R^n_+)$ 中稠密，故由引理 2.3.1 得，存在一 $T\in B(H^1(R^n_+),\ L^2(R^n_+))$，使得

$$\nabla_h u\longrightarrow Tu,\quad \forall u\in H^1(R^n_+)。$$

前已证当 $u\in C^\infty_c(\bar{R}^n_+)$ 时，$Tu=\frac{\partial u}{\partial x_1}$。因而，对任何 $u\in H^1(R^n_+)$，

$$Tu=\frac{\partial u}{\partial x_1}。$$

证毕

注 2.3.1 前面我们定义的算子 τ_h 与 ∇_h 分别为关于变量 x_1 的平移算子与差商算子。当然，若将它们换为关于变量 x_2，…，x_{n-1} 的平移算子与差商算子，相应的结论同样成立。下面我们将这样做，而不再重复说明。

现在回到椭圆型方程的边值问题，利用局部化技术可以将区域 Ω 上的问题化到 R^n_+ 上去讨论，故我们首先考虑 R^n_+ 上的算子

$$L=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}+c(x)。\qquad(3.9)$$

于此设，对任何$\beta\in\mathbb{Z}_+^n$

$$a_{ij},\ b_i,\ C\in C^\infty(\bar{R}_+^n)|,\ D^\beta a_{ij}|,\ |D^\beta b_i|,|D^\beta C|\leqslant K_\beta,$$

和

$$a_{ij}=a_{ji},$$

且满足椭圆型条件

$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant\alpha|\xi|^2$，$\forall x\in\bar{R}_+^n$，$\xi\in R^n$。利用定理2.2.1及注2.2.2可知，存在与$u$无关的常数$C_1$，$C_2$使得

$$(-Lu,\ u)\geqslant C_1\|u\|_1^2-C_2\|u\|^2,\quad\forall u\in H_0^1(\bar{R}_+^n)。\qquad(3.10)$$

引理 2.3.5 若L如上面给定，$u\in H_0^1(R_+^n)$，则存在与u，h无关的常数c使得

$$|(-L\nabla_h u,\ \nabla_h u)|\leqslant C\|\nabla_h u\|_1(\|u\|_1+\|Lu\|)。\qquad(3.11)$$

证明 $u\in H_0^1(R_+^n)$，当$h\neq0$时，$\nabla_h u\in H_0^1(R_+^n)$，直接计算不难得到

$$L\nabla_h u=\nabla_h Lu+R_h u,\qquad(3.12)$$

其中

$$R_h u=-(\sum_{i,j=1}^{n}\nabla_h a_{ij}\tau_h u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}\nabla_h b_i\tau_h u_{x_i}+\nabla_h c\tau_h u)。$$

故

$$\begin{aligned}|(-L\nabla_h u,\ \nabla_h u)|&\leqslant|(\nabla_h Lu,\nabla_h u)|+|(R_h u,\ \nabla_h u)|\\&\leqslant\|\nabla_h Lu\|_{-1}\|\nabla_h u\|_1+C'[\sum_{i=1}^{n}\|u_{x_i}\|\|\nabla_h u\|+\|u\|\|\nabla_h u\|\\&\qquad+\sum_{i,j=1}^{n}\|\tau_h u_{x_ix_j}\|_{-1}\|\nabla_h u\|_1]\\&\leqslant C''\|\nabla_h u\|_1(\|u\|_1+\|\nabla_h Lu\|_{-1}+\sum_{i,j=1}^{n}\|\tau_h u_{x_ix_j}\|_{-1})。\qquad(3.13)\end{aligned}$$

因为

$$\|\tau_h u_{x_i x_j}\|_{-1} = \sup_{\varphi \in C_0^\infty(R_+^n)} \frac{|(\tau_h u_{x_i x_j}, \varphi)|}{\|\varphi\|_1}$$

$$= \sup_{\varphi \in C_0^\infty(R_+^n)} \frac{|(u_{x_j}, \partial_{x_i}\tau_{-h}\varphi)|}{\|\varphi\|_1}$$

$$\leqslant \|u\|_1.$$

同理可得

$$\|\nabla_h Lu\|_{-1} \leqslant \|Lu\|.$$

代入(3.13)式即得(3.11)。

证毕

定理 2.3.2 设L如上给定，$u \in H_0^1(R_+^n)$，$Lu \in L^2(R_+^n)$，则$u \in H^2(R_+^n) \cap H_0^1(R_+^n)$，且

$$\|u\|_2 \leqslant C(\|u\| + \|Lu\|). \tag{3.14}$$

证明 本定理的证明分成以下三步：

(1) 证明 $\|\nabla_h u\|_1$ 关于h一致有界；

(2) 证明 $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(R_+^n)$，$(i=1, \cdots, n-1)$；

(3) 证明 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \in H(R_+^n)$。

(1) 的证明。因为$\nabla_h u \in H_0^1(R_+^n)$，则由(3.10)得

$$C_1\|\nabla_h u\|_1^2 \leqslant C_2\|\nabla_h u\|^2 + |(-L\nabla_h u, \nabla_h u)|.$$

由(3.5)及引理(2.3.5)可得，对任意$\varepsilon>0$成立

$$C_1\|\nabla_h u\|_1^2 \leqslant C_2\|u\|_1^2 + \varepsilon\|\nabla_h u\|_1^2 + \frac{C_3}{\varepsilon}(\|u\|_1^2 + \|Lu\|^2).$$

取$\varepsilon = \dfrac{C_1}{2}$，立即得

$$\|\nabla_h u\|_1^2 \leqslant C_4(\|u\|_1^2 + \|Lu\|^2), \tag{3.15}$$

故$\|\nabla_h u\|_1$一致有界。

(2) 的证明。因为$H^1(R_+^n)$的单位球是弱紧的，故$\{\nabla_h u\}$存在子序列，不妨仍记为$\{\nabla_h u\}$，在$H^1(R_+^n)$中弱收敛于g，且

$$\|g\|_1^2 \leqslant C_4(\|u\|_1^2 + \|Lu\|^2)。 \qquad (3.16)$$

由于对固定的$\varphi \in L^2(R_+^n)$，当$v \in H^1(R_+^n)$时有

$$|(v, \varphi)| \leqslant \|v\|\|\varphi\| \leqslant C\|v\|_1,$$

所以(v, φ)可以视为$H^1(R_+^n)$上的线性连续泛函，且可以表示为

$$(v, \varphi)_{L^2(R_+^n)} = (v, \psi)_{H^1(R_+^n)}, \quad \forall v \in H^1(R_+^n)。$$

因此，当$\nabla_h u$在$H^1(R_+^n)$中弱收敛于g时，对于任意ψ成立

$$(\nabla_h u, \psi)_{H^1(R_+^n)} \longrightarrow (g, \psi)_{H^1(R_+^n)}.$$

这也说明对任意$\varphi \in L^2(R_+^n)$，成立

$$(\nabla_h u, \varphi)_{L^2(R_+^n)} \longrightarrow (g, \varphi)_{L^2(R_+^n)},$$

即$\nabla_h u$在$L^2(R_+^n)$中弱收敛于g。又根据引理2.3.4，$\nabla_h u$在$L^2(R_+^n)$中强收敛于$\frac{\partial u}{\partial x_1}$，从而

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = g \in H^1(R_+^n)。 \qquad (3.17)$$

根据注3.1中的说明，$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(R_+^n) \quad (i=1, \cdots, n-1)$。

(3) 的证明，我们利用方程来证明$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \in H(R_+^n)$。因为

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha|\xi|^2,$$

取$\xi_i = 0 \quad (i=1, \cdots, n-1)$，$\xi_n = 1$，就得

$$a_{nn}(x) \geqslant \alpha > 0。$$

又因为

$$a_{nn}u_{x_nx_n}=f-\sum_{\substack{i+j<2n\\ i,j\le n}}a_{ij}u_{x_ix_j}-\sum_{i=1}^{n}b_iu_{x_i}-cu\in H(R^n_+), \quad (3.18)$$

故 $u_{x_nx_n}\in H(R^n_+)$，结合 (3.17) 得 $u\in H^2(R^n_+)$，且综合 (3.16)、(3.17)、(3.18)，就可得 (3.14)。

证毕

定理 2.3.3 若 L 是如上面假定的椭圆算子，$u\in H^1_0(R^n_+)$，$Lu\in H^k(R^n_+)$，k 为非负整数，则 $u\in H^{k+2}(R^n_+)$，而且有

$$\|u\|_{k+2}\le C_k(\|u\|+\|Lu\|_k),\quad k\ge 0。\quad (3.19)$$

证明 $k=0$ 时，定理 2.3.3 即为定理 2.3.2。今设 $k\le s-1$ ($s\ge 1$) 时，定理 2.3.3 成立，即若 $u\in H^1_0(R^n_+)$，$Lu\in H^k(R^n_+)$，$k\le s-1$，则 $u\in H^{k+2}(R^n_+)$，且

$$\|u\|_{k+2}\le C_k(\|u\|+\|Lu\|_k)。$$

现设 $Lu\in H^s(R^n_+)$，那么由于 $k\le s-1$ 时 (3.19) 成立，故 $u\in H^1_0(R^n_+)\cap H^{s+1}(R^n_+)\subset H^1_0(R^n_+)\cap H^2(R^n_+)$。由定理 1.4.6 知

$$\frac{\partial u}{\partial x_l}\in H^1_0(\Omega),\ l=1,\cdots,n-1。$$

此外

$$L\frac{\partial u}{\partial x_l}=\frac{\partial}{\partial x_l}(Lu)-\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\Big(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l}u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial b_i}{\partial x_l}u_{x_i}+\frac{\partial c}{\partial x_l}u\Big)$$
$$\in H^{s-1}(\Omega)$$

故由归纳法假定得，

$$\frac{\partial u}{\partial x_l}\in H^{s+1}(R^n_+),\ l=1,\cdots,n-1,$$

且

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x_l}\right\|_{s+1}\le C'_{s-1}(\|u\|+\|Lu\|_s+\|u\|_{s+1})。$$

关于 l 相加，利用归纳法假定就可得

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{s+1}\leqslant C(\|u\|+\|Lu\|_s)。$$

再由定理 2.3.2 的证明中第 (3) 步可知，$\left\|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right\|_{s+1}$ 也成立同样的估计式。从而得 $\|u\|_{s+2}$ 的估计式。因此本定理成立。

证毕

下面我们要把前面的结果推广到一般有界区域 Ω 中的椭圆型算子，得出如下的正则性定理。

定理 2.3.4 设 Ω 是 R^n 中有界区域，其边界光滑，L 是 $\bar{\Omega}$ 上具光滑系数的椭圆算子。若 $u\in H_0^1(\Omega)$，$Lu\in H^k(\Omega)$ $(k\geqslant -1)$，则 $u\in H^{k+2}(\Omega)$，且

$$\|u\|_{k+2}\leqslant C_k(\|u\|+\|Lu\|_k)。\tag{3.20}$$

证明 这里我们要用到局部化和展平技巧。设 $\{U_0,\cdots,U_N\}$ 是 $\bar{\Omega}$ 上的开覆盖，且 φ_σ 是 $U_\sigma\cap\bar{\Omega}$ 到球 B 或半球 B^+ 的微分同胚。同胚于整个球的称为内区，同胚于带边半球的称为边区。设 $\{\eta_\sigma\}$ 是从属于 $\{U_\sigma\}$ 的单位分解，记 $u_\sigma=\eta_\sigma u$，我们将证明，$u_\sigma\in H^{k+2}(\Omega)$，具有相应的 (3.20) 式。以下我们仅讨论边区的情形，因为其证明的过程对内区也是适用的。我们将仍然用归纳法来证明此定理。

当 $k=-1$ 时，(3.20) 是平凡的。现设 $u\in H_0^1(\Omega)$，$Lu\in H^k(\Omega)$，$k\leqslant s-1(s\geqslant 0)$，定理 2.3.4 成立，即 $u\in H^{k+2}(\Omega)$，且满足 (3.20)。若 $Lu\in H^s(\Omega)$，因 $H^s(\Omega)\subset H^{s-1}(\Omega)$，故由归纳法假定得 $u\in H^{s+1}(\Omega)$，且成立

$$\|u\|_{s+1}\leqslant C_s(\|u\|+\|L_E u\|_{s-1})。\tag{3.21}$$

直接计算可得

$$Lu_\sigma=\eta_\sigma Lu+2\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial\eta_\sigma}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}+(L\eta_\sigma-c\eta_\sigma)u。\tag{3.22}$$

将右端记为f_σ，则$f_\sigma \in H^s(\Omega)$。记$v_\sigma = u_\sigma \circ \varphi_\sigma^{-1}$，并将变换后的算子仍记为$L$，那么(3.22)可改写为

$$Lv_\sigma = f_\sigma \circ \varphi_\sigma^{-1}，\text{在 } B^+ \text{ 上。}$$

因为$u_\sigma \in H_0^1(\Omega)$，且$\mathrm{supp}\,\eta_\sigma$和$B^+$的弯曲边界不相交，那么$v_\sigma$零延拓到$R_+^n$上仍属于$H_0^1(R_+^n)$，以后记其为$\hat{v}_\sigma$，类似地将$f_\sigma \circ \varphi_\sigma^{-1}$零延拓到整个$R_+^n$上仍属于$H^s(R_+^n)$，也记其为$\hat{f}_\sigma$，还将算子$L$保持系数光滑性和椭圆型性地延拓到$\bar{R}_+^n$上，例如可令

$$\hat{L} = \psi L + (1-\psi)\triangle，$$

其中$\psi \in C_0^\infty(\bar{R}_+^n)$，且当$x \in \mathrm{supp}\,\eta_\sigma$时，$\psi(x) \equiv 1$，$\mathrm{supp}\,\psi \subset \bar{B}^+$，$\mathrm{supp}\,\psi$和$B^+$的弯曲边界仍不相交。经过上述延拓后，我们有

$$\hat{L}\hat{v}_\sigma = \hat{f}_\sigma \text{，在 } R_+^n \text{ 上。} \qquad (3.23)$$

由定理2.3.3得$\hat{v}_\sigma \in H^{s+2}(R_+^n)$，且

$$\begin{aligned}\|\hat{v}_\sigma\|_{s+2} &\leqslant C_\sigma(\|\hat{v}_\sigma\| + \|\hat{f}_\sigma\|_s) \\ &\leqslant C'_\sigma(\|u\| + \|u\|_{s+1} + \|Lu\|_s)。\qquad (3.24)\end{aligned}$$

注意到(3.21)，有

$$\begin{aligned}\|u\|_{s+2} \leqslant \sum_\sigma \|u_\sigma\|_{s+2} &\leqslant C\sum_\sigma \|\hat{v}_\sigma\|_{s+2} \\ &\leqslant C'(\|u\| + \|Lu\|_s)。\end{aligned}$$

从而由归纳法知定理2.3.4成立。

证毕

注 2.3.2 在定理2.3.4的条件下，若$Lu \in C^\infty(\bar{\Omega})$，则$u \in C^\infty(\bar{\Omega})$。

§ 4 关于解的正则性的进一步讨论

上节讨论了Dirichlet问题解的正则性，我们也可以不考虑边界条件，转向如下的问题：若$u \in \mathscr{D}'(\Omega)$，$L$为椭圆算子，那么当$Lu$在$\Omega$内部有较好的正则性时，$u$的正则性能否相应地改

善呢？为了回答这个问题，要引入局部的Sobolev空间，并以它去度量解在区域内部的正则性。

定义 2.4.1 对于给定的区域Ω，局部的Sobolev空间定义为

$$H^k_{loc}(\Omega)=\{u\,|\,\text{对任意 } C^\infty_c(\Omega) \text{ 函数 } \varphi,\ \text{成立 } \varphi u\in H^k(\Omega)\}。\tag{4.1}$$

易见，若$u\in H^k_{loc}(\Omega)$，则对任意$\Omega'\subset\subset(\Omega)$，有$u\in H^k(\Omega')$。

引理 2.4.1 设$u\in\mathscr{D}'(\Omega)$。若存在$k\in\mathbb{Z}_+$和正常数C使得对任一$\varphi\in C^\infty_c(\Omega)$有

$$|\langle u,\ \varphi\rangle|\leqslant C\|\varphi\|_k,\tag{4.2}$$

那么，$u\in H^{-k}(\Omega)$。

证明 因为u满足(4.2)式，所以$l(\varphi)=\langle u,\ \varphi\rangle$可看成$H^k_0(\Omega)$中一线性子空间$C^\infty_c(\Omega)$上的有界线性泛函；由$C^\infty_c(\Omega)$在$H^k_0(\Omega)$中的稠密性知：这个泛函可扩张到$H^k_0(\Omega)$上，故$u\in(H^k_0(\Omega))'$，从而$u\in H^{-k}(\Omega)$。

注 2.4.1 同理可证，当k为负整数时，若对任一$\varphi\in C^\infty_c(\Omega)$。(4.2)成立，那么$u\in H^{-k}_0(\Omega)$。

引理 2.4.2 若$u\in\mathscr{D}'(\Omega)$，且$\mathrm{supp}u\subset\Omega$，那么存在$k\in\mathbb{Z}$，使得$u\in H^k(\Omega)$。

证明 从引理2.4.1知：仅需证明存在正整数k使得u满足(4.2)。事实上，若这样的k不存在。那么对任一$\nu\in\mathbb{Z}_+$，存在$\varphi_\nu\in C^\infty_c(\Omega)$，满足

$$|\langle u,\ \varphi_\nu\rangle|\geqslant\nu\|\varphi_\nu\|_\nu。\tag{4.3}$$

今取$\psi\in C^\infty_c(\Omega)$，使$\psi(x)$在$\mathrm{supp}\,u$的一邻域内为1，并记$\psi_\nu=\varphi_\nu\psi/\nu\|\varphi_\nu\|_\nu$。那么由嵌入定理知，对任意$\alpha$，当$\nu>|\alpha|+\left[\frac{n}{2}\right]+1$时有

$$\sup_{x\in\Omega}|D^{\alpha}\psi_{\nu}|\leqslant C\|\varphi_{\nu}\|_{|\alpha|+[\frac{n}{2}]+1}/\nu\|\varphi_{\nu}\|_{\nu}.$$

注意到所有的 ψ_{ν} 有共同的支集，故 ψ_{ν} 在 $C_c^{\infty}(\Omega)$ 中趋于零。而因为 $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$，则得 $\lim\limits_{\nu\to\infty}<u, \psi_{\nu}>=0$。但另一方面，由(4.2)得

$$|<u, \psi_{\nu}>|\geqslant 1,$$

这就导致矛盾。

证毕

这一引理告诉我们，支集为紧的广义函数，必为有限阶的。

注 2.4.2 由引理 2.4.2 得，若 $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$，Ω_1 为 Ω 的相对紧集，则存在 $k\in\mathbb{Z}$，使得 $u\in H^k(\Omega)$。

定理 2.4.1 设 L 为 Ω 上具 C^{∞} 系数的椭圆算子，$u\in\mathscr{D}'(\Omega)$。若 $Lu\in H^k_{loc}(\Omega)$ $(k\in\mathbb{Z})$，则 $u\in H^{k+2}_{loc}(\Omega)$。

证明 首先设 $\operatorname{supp} u$ 为 Ω 中的紧集。引理 2.4.2 指出：存在 $s\in\mathbb{Z}$，使 $u\in H^s(\Omega)$。不妨设 $k+2>s$。因为，若 $k+2\leqslant s$，则已无需证明。又若 $s\geqslant 1$，那么 $u\in H_0^1(\Omega)$。$Lu\in H^k(\Omega)$，此时可由定理 2.3.4 得 $u\in H^{k+2}(\Omega)$，故只需对 $s\leqslant 0$ 的情形加以证明。为此，我们先估计

$$I(g)=|<u, g>|/\|g\|_{-(s+1)},$$

当 g 取遍 $C_c^{\infty}(\Omega)$ 函数空间时的上界。因为 L 的共轭算子 L^* 也是椭圆的，那么存在 λ_0，使得对任一 $g\in C_c^{\infty}(\Omega)$，存在 $v\in H_0^1(\Omega)$，满足 $(L^*-\lambda_0)v=g$，且由定理 2.3.4 知，此解 $v\in C^{\infty}(\bar{\Omega})$，且成立

$$\|v\|_{1-s}\leqslant C_s\|g\|_{-(s+1)}\ , \quad \forall s\in\mathbb{Z}_- . \tag{4.4}$$

所以对任一取定的在 $\operatorname{supp} u$ 上等于 1 的 $C_c^{\infty}(\Omega)$ 函数 ψ，有

$$\begin{aligned}I(g)&=|(u, (L^*-\lambda_0)v)|/\|g\|_{-(s+1)}\\&=|((L-\lambda_0)u, \psi v)|/\|g\|_{-(s+1)}。\end{aligned}$$

结合 (4.4) 得

$$|I(g)| \leqslant \|(L-\lambda_0)u\|_{s-1}\|\psi v\|_{1-s}/\|g\|_{-(s+1)}$$
$$\leqslant C'\|(L-\lambda_0)u\|_{s-1}$$
$$\leqslant C''(\|Lu\|_{s-1}+\|u\|_{s-1})。$$

由引理 2.4.1 得$u\in H^{s+1}(\Omega)$。若 $k+2=s+1$，我们就得到了所需要的结论。若 $k+2>s+1$，那么取 $s+1$ 代替 s 重复前述推理，就可证得 $u\in H^{s+2}(\Omega)$。反复多次就可证得 $u\in H^{k+2}(\Omega)$。

再讨论 $\mathrm{supp}\, u$ 非紧的情形。仅需证明对任一 $x_0\in\Omega$，存在 x_0 的一邻域 $O(x_0)\subset\Omega$，使得 $u|_{O(x_0)}\in H^{k+2}(\Omega)$。作 x_0 的邻域序列

$$O_0(x_0)\supset\supset O_1(x_0)\supset\supset\cdots\supset\supset O_\nu(x_0)\supset\supset\cdots, \qquad (4.5)$$

又作 $\psi_\nu\in C_c^\infty(O_\nu(x_0))$，且在 $O_{\nu+1}(x_0)$ 的一邻域内，$\psi_\nu(x)\equiv 1$。记 $v_0=\psi_0 u$，那么 v_0 满足

$$Lv_0=\psi_0 Lu+L_{\psi_0}u。 \qquad (4.6)$$

式中 L_{ψ_0} 是依赖于ψ_0 的一阶线性微分算子。因为 $\mathrm{supp}\psi_0$ 为 Ω 中紧集，故由引理 2.4.2 知，存在 s，使 u 在 $\mathrm{supp}\psi_0$ 上属于H^s，从而 (4.6) 之右端属于 $H^{\min(k,s-1)}$。由本定理前面已证得的结果知 $v_0\in H^{\min(k+2,s+1)}$。再作 $v_1=\psi_1 u$，可得类似于 (4.6) 的式子。

$$Lv_1=\psi_1 Lu+L_{\psi_1}u. \qquad (4.7)$$

由ψ_1 的构造可知，(4.7) 的右端属于 $H^{\min(k,s)}$，因而 $v_1\in H^{\min(k+2,s+2)}$。经多次反复可证得对某个 ν，使 u 在 $O_\nu(x_0)$ 上属于H^{k+2}。又由于 x_0 为 Ω中任意一点，所以 $u\in H^{k+2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$。

证毕

注 2.4.3 在定理 2.4.1 的条件下，若 $Lu\in C^\infty(\Omega)$，则 $u\in C^\infty(\Omega)$。

§5 两择性定理

定理 2.2.3 给出了 Dirichlet 问题解存在和唯一的充分条件，但实际的情形比这丰富得多。本节中，我们将给出二阶椭圆型方程 Dirichlet 问题的 Fredholm 两择性定理。于是，椭圆型方程的 Dirichlet 问题在这样的意义下总是可解的。为此，在有界具有光滑边界的区域 Ω 上考虑椭圆算子 L 的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} Lu=f, & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ u=0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上。} \end{cases} \tag{5.1}$$

由定理 2.2.3 知，存在 $\lambda_0 \in R^1$ 使问题

$$\begin{cases} (L-\lambda_0)u=f, & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ u=0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上。} \end{cases} \tag{5.2}$$

对任一 $f \in H^{-1}(\Omega)$，存在唯一的解 $u \in H_0^1(\Omega)$，且满足

$$\|u\|_1 \leqslant C\|f\|_{-1}。$$

因此 (5.2) 定义了一个 $H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ 的连续同构。若仍记这一同构映照为 $(L-\lambda_0)$，则显然 $(L-\lambda_0)^{-1}$ 是 $H^{-1}(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ 的线性连续算子。现在把 $(L-\lambda_0)^{-1}$ 限制在 $L^2(\Omega)$ 中，它就可看成一个从 $L^2(\Omega)$ 到 $H_0^1(\Omega)$ 的线性连续算子。因为 Ω 为有界区域，故由定理 1.5.4 知，$H_0^1(\Omega)$ 到 $L^2(\Omega)$ 的嵌入映照是紧映照，所以

$$L^2(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \tag{5.3}$$

所定义的复合映照为紧映照。我们仍记它为 $(L-\lambda_0)^{-1}$。这是一全连续算子。注意到 (5.1) 等价于方程

$$u+\lambda_0(L-\lambda_0)^{-1}u=(L-\lambda_0)^{-1}f,$$

记 $M=(L-\lambda_0)^{-1}$，我们有

$$u+\lambda_0 Mu=Mf。 \tag{5.4}$$

它所相应的齐次方程为

$$u+\lambda_0 Mu=0。$$

设前面所取的 λ_0 充分大，可使 $(L^*-\lambda_0)^{-1}$ 也是 $L^2(\Omega)\longrightarrow L^2(\Omega)$ 的全连续算子。由 Hilbert 空间共轭算子的定义知，M 的共轭算子 M^* 应满足

$$(Mu,\ v)=(u,\ M^*v),\quad \forall v\in L^2(\Omega)。$$

但由 M 的表达式，有

$$\begin{aligned}(Mu,\ v)&=((L-\lambda_0)^{-1}u,\ (L^*-\lambda_0)(L^*-\lambda_0)^{-1}v)\\&=((L-\lambda_0)(L-\lambda_0)^{-1}u,\ (L^*-\lambda_0)^{-1}v)\\&=(u,\ (L^*-\lambda_0)^{-1}v)。\end{aligned}\tag{5.5}$$

这里，在得到 (5.5) 的过程中，我们进行了分部积分。其合理性可以通过 $C_0^\infty(\Omega)$ 函数的逼近来证得。由 (5.5) 可知 $M^*=(L^*-\lambda_0)^{-1}$。

于是，我们把一组椭圆型方程的 Dirichlet 问题化成了一组等价的算子方程：

$$Lu=f,\quad 在\ \Omega\ 内；\ u=0,\ 在\ \partial\Omega\ 上，\tag{5.6}$$

$$Lu=0,\quad 在\ \Omega\ 内；\ u=0,\ 在\ \partial\Omega\ 上，\tag{5.7}$$

$$L^*v=g,\quad 在\ \Omega\ 内；\ v=0,\ 在\ \partial\Omega\ 上，\tag{5.8}$$

$$L^*v=0,\quad 在\ \Omega\ 内；\ v=0,\ 在\ \partial\Omega\ 上。\tag{5.9}$$

它们分别等价于

$$u+\lambda_0 Mu=Mf,\tag{5.6$'$}$$

$$u+\lambda_0 Mu=0,\tag{5.7$'$}$$

$$v+\lambda_0 M^*v=M^*g,\tag{5.8$'$}$$

$$v+\lambda_0 M^*v=0。\tag{5.9$'$}$$

从而可得以下四个定理。

定理 2.5.1 (5.6) 对任何 $f\in H^{-1}(\Omega)$ 有解的充分必要条件是 (5.7) 只有零解。

定理 2.5.2 (5.7)与(5.9)有相同有限个数的线性独立解。

定理 2.5.3 (5.6) 对 $f\in H^{-1}(\Omega)$ 有解的充分必要条件是

$$(f,\ v)=0,\quad \forall v\in V \tag{5.10}$$

其中 V 是 (5.9) 的解空间。

定理 2.5.4 存在无有限聚点的离散集 $\Lambda\subset\mathbb{C}^1$，使得对任意 $\lambda\bar{\in}\Lambda$，问题

$$\begin{cases}(L-\lambda)u=0, & \Omega\text{ 内}\\ u=0, & \partial\Omega\text{ 上}\end{cases} \tag{5.11}$$

只有零解，而当 $\lambda\in\Lambda$ 时，(5.11) 有非零解。

上述定理证明的基本方法就是将这些命题化成 (5.6)′—(5.9)′ 的对应命题，然后再利用全连续算子的 Fredholm 理论（见附录 A）得到所需的结果。下面以定理 2.5.3 与定理 2.5.4 的证明为例说明之。

定理 2.5.3 的证明 因 (5.6) 有解与 (5.6)′ 有解等价，因而由附录系 $A.1$ 知 (5.6)′ 有解的充分必要条件为：对任一满足 $v+\lambda_0 M^*v=0$ 的解 v 成立

$$(Mf,\ v)=0。 \tag{5.12}$$

因(5.9)′等价于 (5.9)，故由定理 2.3.4 知 $v\in C^\infty(\bar{\Omega})\cap H_0^1(\Omega)$。又$(L^*-\lambda_0)v=-\lambda_0 v$，代入(5.12) 得

$$\left((L-\lambda_0)^{-1}f,\ -\frac{1}{\lambda_0}(L^*-\lambda_0)v\right)=0,$$

故

$$\begin{aligned}(f,\ v)&=((L-\lambda_0)(L-\lambda_0)^{-1}f,\ v)\\ &=((L-\lambda_0)^{-1}f,\ (L^*-\lambda_0)v)=0。\end{aligned}$$

证毕

定理 2.5.4 的证明 (5.11) 可以写成

$$\begin{cases}(L-\lambda_0)u+(\lambda_0-\lambda)u=0, & \Omega\text{ 内},\\ u=0, & \partial\Omega\text{ 上},\end{cases} \tag{5.13}$$

或

$$u+(\lambda_0-\lambda)Mu=0。 \tag{5.14}$$

由全连续算子的 Fredholm 理论知（见附录定理 $A.4$），存在无有限聚点的离散集$\Lambda\subset\mathbb{C}^1$，使得当 $\lambda_0-\lambda\notin\Lambda$ 时，(5.14) 只有零解，而当 $\lambda_0-\lambda\in\Lambda$ 时，(5.14) 有非零解。注意到(5.14)，(5.13)，(5.11) 的等价性，立刻得到定理 2.5.4 之结论。

证毕

§ 6 特征值和特征函数的展开定理

本节讨论椭圆型算子的特征值问题，首先引入以下的概念。

定义 2.6.1 设A是 Hilbert 空间H到H的线性算子，若对任一$x\in H$，有 $(Ax, x)\geqslant 0$，则称算子A为非负的。

引理 2.6.1 设T是非负自共轭有界线性算子，则对任一$x\in H$，$\|Tx\|\leqslant\|T\|^{1/2}(Tx, x)^{1/2}$。

证明 令$[x, y]=(Tx,y)$，则根据算子T的性质易知

$$[x, y]=\overline{[y, x]},$$

$$[\alpha x_1+\beta x_2, y]=\alpha[x_1, y]+\beta[x_2, y],$$

$$[x, x]\geqslant 0。$$

尽管这里定义的 $[x, y]$ 在 $x=y$ 时不是严格正的，但容易导出

$$|[x, y]^2|\leqslant[x, x][y, y]。 \tag{6.1}$$

在 (6.1) 中，取 $y=Tx$，则立即得

$$\|Tx\|^4\leqslant(Tx, x)(T^2x, Tx)$$

$$\leqslant\|T\|\|Tx\|^2(Tx, x).$$

稍加整理，就得引理 2.6.1。

证毕

定义 2.6.2 设A是$H\longrightarrow H$的线性算子。若存在$\lambda\in\mathbb{C}^1$和$x\in H$，$x\neq 0$，使得$Ax=\lambda x$，则称λ为A的**特征值**，称x为对应此特征值的**特征向量**或**特征函数**。

由此定义立即可看出，若A为自共轭的，则A的特征值λ是实数。又若A是非负的自共轭算子，那么其特征值必是非负实数。

引理 2.6.2 设A是自共轭的全连续算子，则存在$v\in H$满足$\|v\|=1$，$Av=\mu v$，其中$|\mu|=\|A\|$。

证明 不妨设$\|A\|\neq 0$，否则，引理是平凡的。因为$\|A\|=\sup\{\|Av\|\,|\,v\in H,\ \|v\|=1\}$，故可找到一序列$\{v_n\}$，其中$v_n\in H$，满足$\|v_n\|=1$，$\|Av_n\|\longrightarrow\|A\|(n\to\infty)$。因$A$是紧算子，则可取一子序列，不妨仍记为$\{Av_n\}$，满足$Av_n\to w$，故$\|w\|=\|A\|\neq 0$。另一方面

$$(\|A\|^2v_n-A^2v_n,\ v_n)=\|A\|^2-\|Av_n\|^2\longrightarrow 0(n\to\infty)。\qquad(6.2)$$

令$B=\|A\|^2-A^2$，那么B是自共轭的非负有界线性算子。故由引理 2.6.1 得

$$\|Bv_n\|=\|\,\|A\|^2v_n-A^2v_n\|$$
$$\leqslant\|\,\|A\|^2-A^2\|^{1/2}(\|A\|^2v_n-A^2v_n,\ v_n)^{1/2},$$

结合 (6.2) 式知

$$Bv_n\longrightarrow 0\quad(n\to\infty)。\qquad(6.3)$$

又因为A^2是全连续性算子，$\|v_n\|=1$，故$\{A^2v_n\}$中存在收敛子序列。若仍记这些子序列为$\{v_n\}$，注意到 (6.3) 式和$\|A\|\neq 0$，那么有$v_n\longrightarrow v_0\in H$，且$\|v_0\|=1$，以及

$$(\|A\|^2I-A^2)v_0=0。$$

此即

$$(\|A\|I-A)(\|A\|I+A)v_0=0。$$

当$(\|A\|I+A)v_0\neq 0$，那么，令$e_0=(\|A\|I+A)v_0/\|(\|A\|I+A)v_0\|$就有

$$Ae_0=\|A\|e_0 \tag{6.4}$$

当$(\|A\|I+A)v_0=0$时，取$e_0=v_0/\|v_0\|$，就有

$$Ae_0=-\|A\|e_0。 \tag{6.5}$$

证毕

定理 2.6.1 设H是Hilbert空间，A是H到H的自共轭的全连续算子，则其特征值构成按绝对值单调趋于零的实数列$\{|\mu_j|\}$，且对应的特征函数系$\{e_j\}$ $(Ae_j=\mu_j e_j)$，构成$R(A)$中的完备正交基。

证明 由引理2.6.2得知，存在μ_1和e_1使$|\mu_1|=\|A\|$，$\|e_1\|=1$，$Ae_1=\mu_1e_1$。因为A是自共轭算子，故μ_1为实数，记$H_1=\{e_1\}^\perp$，显然H_1是H的闭子空间，因而可看成一个Hilbert空间。又因为对任意$u\in H_1$，$(Au, e_1)=(u, Ae_1)=(u, \mu_1e_1)=0$，所以$H_1$是$A$的不变子空间，即$AH_1\subset H_1$。于是把$A$限制在$H_1$上，它是$H_1$到$H_1$的自共轭全连续算子。再次使用引理2.6.2就得：存在实数μ_2以及$e_2\in H_1$，使得

$$Ae_2=\mu_2e_2,\ (e_1,e_2)=0,\ \|e_2\|=1, \tag{6.6}$$

$$|\mu_2|=\sup_{x\in H_1}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\leqslant|\mu_1|。 \tag{6.7}$$

再作$\{e_1, e_2\}$的正交补空间，又可用上述方法得到μ_3，e_3，如此等等，于是，可能有以下两种情形：

(1) $|\mu_1|\geqslant|\mu_2|\geqslant\cdots\geqslant|\mu_{n-1}|>0$，$\mu_n=\mu_{n+1}=\cdots=0$。此时从构造过程知，对任意的$x\in\{e_1, \cdots, e_{n-1}\}^\perp=H_{n-1}$，有$Ax=0$，从而有

$$R(A)=\{e_1\cdots, e_{n-1}\}\oplus AH_{n-1}=\{e_1,\cdots,e_{n-1}\}。 \tag{6.8}$$

因此，特征函数系$\{e_1,\cdots,e_{n-1}\}$构成了$R(A)$中的一组基，而$\mu_j\to 0(j\to\infty)$是明显的。

(2) 所有μ_n都不为零。因$\{|\mu_j|\}$单调下降，故必有极限，若$\lim\limits_{j\to\infty}|\mu_j|=\varepsilon>0$，则

$$
\begin{aligned}
&\|Ae_j-Ae_k\|^2\\
&=\|\mu_je_j-\mu_ke_k\|^2\\
&=|\mu_j|^2+|\mu_k|^2\geqslant 2\varepsilon^2>0。
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

这样，$\{Ae_j\}$就不可能含收敛的子序列，这和A是全连续算子相矛盾。从而证得$\lim\limits_{j\to\infty}|\mu_j|=0$。

现证特征函数系$\{e_j\}$在$R(A)$中构成完备正交基，设$w\in R(A)$，即存在$u\in H$，使$w=Au$，那么，有

$$(w,\ e_j)=(Au,\ e_j)=\mu_j(u,\ e_j), \tag{6.10}$$

和

$$u-\sum_{j=1}^{n}(u,\ e_j)e_j\in H_n=\{e_1,\ \cdots,\ e_n\}^{\perp}。$$

根据μ_j，e_j的构造方法，我们有$\mu_{n+1}=\sup\{\|Ax\|/\|x\|\,|\,x\in H_n\}$，所以

$$\left\|A\left(u-\sum_{j=1}^{n}(u,e_j)e_j\right)\right\|\leqslant\mu_{n+1}\left\|u-\sum_{j=1}^{n}(u,\ e_j)e_j\right\|,$$

即

$$
\begin{aligned}
&\left\|w-\sum_{j=1}^{n}\mu_j(u,\ e_j)e_j\right\|\\
&\leqslant\mu_{n+1}\|u\|\ \longrightarrow 0,\ (n\to\infty)。
\end{aligned}
$$

结合(6.10)式即得

$$w=\sum_{j=1}^{\infty}(w,\ e_j)e_j。 \tag{6.11}$$

证毕

注 2.6.1 在定理2.6.1的条件下，若$\mu\neq0$，那么对应于μ的特征函数全体，只能是有限维的。

事实上，设$Ae_j=\mu e_j$，$(e_j,e_k)=\delta_j^k$，$(k,j=1,\cdots)$。那么，类似可计算得

$$\|Ae_j-Ae_k\|^2=2|\mu|^2>0.$$

这和A是全连续算子相矛盾。故对应于μ的特征函数全体不可能是无限维的。

现考虑椭圆算子的Dirichlet问题

$$\begin{cases} Lu=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\,u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}b_iu_{x_i}+\,cu=\lambda u,\ x\in\Omega, \\ u|_{\partial\Omega}=0. \end{cases} \tag{6.12}$$

我们称(6.12)的非平凡解为算子L的Dirichlet问题之**特征函数**，并称λ为**特征值**。在以下的讨论中，我们只考虑L为自共轭算子的情形。易知，此时问题(6.12)也是自共轭的。

定理 2.6.2 设$\Omega\subset R^n$是有界的光滑区域，L是Ω上的椭圆算子，$L=L^*$，则(6.12)存在可列个特征值

$$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_\nu\geqslant\cdots,\ \lim_{\nu\to\infty}\lambda_\nu=-\infty \tag{6.13}$$

和对应的特征函数e_1，$e_2,\cdots,e_n$，$\cdots$，满足

$$(e_i,\ e_j)=\delta_i^j,\ Le_i=\lambda_ie_i, \tag{6.14}$$

且

$$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}\ \text{在}\ L^2(\Omega)\text{中完备。} \tag{6.15}$$

证明 首先把(6.12)化为全连续算子方程。事实上，由定理2.2.3知，存在λ_0，使$(-L+\lambda_0)^{-1}$是$L^2(\Omega)\to H_0^1(\Omega)$的线性连续算子。又因$\Omega$是有界区域，故$(-L+\lambda_0)^{-1}$是$L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$的全连续算子。记$\mu=\dfrac{1}{\lambda-\lambda_0}$，那么(6.12)等价于

$$Mu=\mu u,\ \text{其中}M=(L-\lambda_0)^{-1}. \tag{6.16}$$

另一方面，$M^*=(L^*-\lambda_0)^{-1}=(L-\lambda_0)^{-1}=M$，因此，$M$为自共轭的全连续算子。由定理2.2.3知，当$\lambda>\lambda_0$时，$(-L+\lambda_0)^{-1}$是$L^2(\Omega)\to H_0^1(\Omega)$的线性连续算子。故$\lambda$不可能为(6.12)的特征值。这就说明(6.12)的所有特征均小于λ_0。由定理2.6.1得，存在(6.16)的特征值$\{\mu_j\}$及相应的特征向量$\{e_j\}$，满足

$$\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\cdots\leqslant\mu_\nu\leqslant\cdots\leqslant0,\ \lim_{j\to\infty}\mu_j=0, \qquad (6.13)'$$

$$(e_i,\ e_j)=\delta_i^j,\ \ Me_i=\mu_i e_i\ \ (i,\ j=1,\ \cdots,\ ), \qquad (6.14)'$$

$$\{e_i\}_{i=1}^\infty \text{ 是 } R(M) \text{ 中的正交完备基。} \qquad (6.15)'$$

注意到(6.16)和(6.12)的等价关系，我们有$\lambda_i=\lambda_0+\dfrac{1}{\mu_i}$，结合(6.13)′、(6.14)′，就得(6.13)、(6.14)。

现在剩下的就是需证明$\overline{R(M)}=L^2(\Omega)$。事实上，对任一$\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，$\varphi$必是Dirichlet问题$(-L+\lambda_0)u=(-L+\lambda_0)\varphi$，$u|_{\partial\Omega}=0$之解，即 $\varphi=(-L+\lambda_0)^{-1}(-L+\lambda_0)\varphi\in R(M)$。因此，$C_0^\infty(\Omega)\subset R(M)$。因$C_0^\infty(\Omega)$在$L^2(\Omega)$中稠密，故$\overline{R(M)}=L^2(\Omega)$，从(6.15)′立即可得(6.15)。

证毕

这一定理是用分离变量法求解边值问题的理论基础。

例1 考虑常微分方程的边值问题

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2x}{dx^2}=f(x)\in L^2((0,\ 1)), & (6.17)\\ u|_{x=0}=u|_{x=1}=0。 & (6.18)\end{cases}$$

在目前的情况下$L=-\dfrac{d^2}{dx^2}$，它自然是二阶椭圆算子，并且是自共轭的。根据定理2.6.2，有可列个特征值及对应的特征函数系。这些特征值和特征函数可用如下方法确定：将$Lu=\lambda u$的通解表

示为

$$u=C_1\sin\sqrt{\lambda}x+C_2\cos\sqrt{\lambda}x,$$

从 $u(0)=u(1)=0$可得

$$\lambda_n=n^2\pi^2(n=1,\cdots,),\ e_n=\sqrt{2}\sin n\pi x.$$

定理 2.6.2 指出：$\{\sqrt{2}\sin n\pi x\}_{n=1}^{\infty}$ 是在 $L^2((0,1))$ 中的标准正交完备系。因此，我们可将 $f(x)$ 关于此函数系展开成 Fourier 级数：

$$f(x)=\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin n\pi x,$$

其中 $\alpha_n=\sqrt{2}\int_0^1\sin n\pi x f(x)dx$。且可设问题 (6.17)、(6.18) 的解为

$$u=\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin n\pi x,$$

代入 (6.17) 后得 $C_n=\alpha_n/n^2\pi^2$，即 (6.17)、(6.18) 的解为

$$u=\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n^2\pi^2}\sin n\pi x. \tag{6.19}$$

例2 设 Ω为 R^n中具光滑边界的区域，考虑 Laplace 算子的特征值问题

$$-\Delta u=\lambda u,\ u|_{\partial\Omega}=0, \tag{6.20}$$

则有结论

(1) $\lambda_1>0$,

(2) 对应于 $\{\lambda_i\}$ 的特征函数系 $\{e_i\}$ 构成 $H_0^1(\Omega)$ 中的完备正交系。

证明 (1) 若 u_1 为对应于 λ_1 的单位特征函数，则$u_1\in C^\infty(\bar{\Omega})\cap H_0^1(\Omega)$，满足

$$(-\Delta u_1,u_1)=\lambda_1\|u_1\|^2=\lambda_1.$$

分部积分后得

$$\lambda_1=\int\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right|^2 dx\geqslant 0。$$

但若 $\lambda_1=0$，则立即可得 $u_1\equiv\text{const}$，从而 $u_1=0$。这和 $\|u_1\|=1$ 相矛盾。故 $\lambda_1>0$。

(2) 设 $-\triangle e_j=\lambda_j e_j$，则 $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中形成完备的标准正交系。由于

$$\begin{aligned}(e_k,\ e_j)_{H^1(\Omega)}&=\int_\Omega e_k\cdot\bar{e}_j\,dx+\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial e_k}{\partial x_i}\frac{\partial\bar{e}_j}{\partial x_i}dx\\&=\int_\Omega(e_k-\triangle e_k)\bar{e}_j dx=(1+\lambda_k)\int_\Omega e_k\bar{e}_j dx\\&=(1+\lambda_k)\delta_k^j。\end{aligned}\tag{6.21}$$

故 $\{e_j\}$ 又构成 $H_0^1(\Omega)$ 中的正交系。下面证明其完备性。对于任意的 $u\in C_c^\infty(\Omega)$，有 $\triangle u\in L^2(\Omega)$，则

$$\triangle u=\sum_{j=1}^{\infty}(\triangle u,\ e_j)=-\sum_{j=1}^{\infty}(u,\ e_j)\lambda_j e_j,\tag{6.22}$$

故

$$\|\triangle u+\sum_{j=1}^{m}(u,e_j)\lambda_j e_j\|\longrightarrow 0,(m\to\infty)。$$

于是

$$\begin{aligned}&\|u-\sum_{j=1}^{m}(u,\ e_j)e_j\|_1^2\\&=\|u-\sum_{j=1}^{m}(u,\ e_j)e_j\|^2+\sum_{j=1}^{n}\|\frac{\partial}{\partial x_i}(u-\sum_{j=1}^{m}(u,e_j)e_j)\|^2\\&\leqslant 2\|u-\sum_{j=1}^{m}(u,\ e_j)e_j\|^2+\|\triangle u+\sum_{j=1}^{m}(u,\ e_j)\lambda_j e_j\|^2\\&\longrightarrow 0,\ (m\to\infty)。\end{aligned}\tag{6.23}$$

这说明 $\{e_j\}$ 的线性组合按 H^1 范数的闭包包含 $C_c^\infty(\bar{\Omega})$，而 $C_c^\infty(\Omega)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中稠密，故 $\{e_j\}$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 中的完备正交系。

到现在为止，我们把微分方程的特征值问题化为全连续算子方程的相应问题进行讨论，得到椭圆算子 Dirichlet 问题的特征函数展开定理。但实际上，在具体计算某一算子的特征值时，不必遵循这一过程。下述定理提供了一个特征值的直接表达式。

定理 2.6.3 设 Ω 是 R^n 中有界的光滑区域，L 是定理 2.6.2 中所述算子，则第一特征值

$$\lambda_1 = \sup_{u \in C_c^\infty(\Omega)} \frac{(Lu,\ u)}{\|u\|^2}, \tag{6.24}$$

且对应于 λ_1 的特征向量 e_1 取到极大值。

证明 由定理2.6.2 知(,6.12)有特征值 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant \cdots$ 及对应的特征向量 $e_1,\ e_2, \cdots, e_n,\ \cdots$，且 $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的标准正交完备基。对任一 $u \in C_c^\infty(\Omega)$，$Lu \in C_c^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$，从而有展开式

$$Lu = \sum_{j=1}^\infty (Lu,\ e_j) e_j = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j (u,\ e_j) e_j.$$

同样，u 也有展开式

$$u = \sum_{j=1}^\infty (u,\ e_j) e_j.$$

注意到 $\|u\|^2 = \sum_{j=1}^\infty |(u,\ e_j)|^2$，那么

$$\begin{aligned}&(Lu,\ u) - \lambda_1 \|u\|^2 \\ &= \sum_{j=2}^\infty (\lambda_j - \lambda_1) |(u,\ e_j)|^2 \leqslant 0.\end{aligned}$$

因此

$$\sup \frac{(Lu,\ u)}{\|u\|^2} \leqslant \lambda_1. \tag{6.25}$$

另一方面，当 $u = e_1$ 时，

$$\frac{(Le_1,\ e_1)}{\|e_1\|^2}=\lambda_1。\tag{6.26}$$

因 $e_1\in H_0^1(\Omega)$，故存在 $C_c^\infty(\Omega)$ 函数列 $\{u_n\}$，它在 $H_0^1(\Omega)$ 中收敛于 e_1。从而

$$\frac{(Lu_n,u_n)}{\|u_n\|^2}\longrightarrow\frac{(Le_1,\ e_1)}{\|e_1\|^2},\ (n\to\infty)。$$

这就证得 (6.24)。

证毕

注 2.6.2 类似地，对于第 j 个特征值 λ_j，有

$$\lambda_j=\sup_{\substack{u\in C_c^\infty(\Omega)\\ (u,e_k)=0\\ 1<k<j}}\frac{(Lu,\ u)}{\|u\|^2}。\tag{6.27}$$

其证明留给读者。

注 2.6.3 因为 (Lu,u) 是 $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\to\mathbb{C}^1$ 的连续映照，故 (6.24) (6.27) 中 $C_c^\infty(\Omega)$ 也可改成 $H_0^1(\Omega)$。且由此可以导出计算特征值的近似值的各种方法。

下面，我们讨论算子 L 的 Dirichlet 问题特征值的另一种计算方法。

定理 2.6.4 （最大-最小原理）设 L 如定理2.6.2所述，Σ_{n-1} 是 $L^2(\Omega)$ 中任一组 $(n-1)$ 个线性无关的元素，$\Sigma_{n-1}=\{v_1\cdots,\ v_{n-1}\}$。记

$$d(v_1,\cdots,v_{n-1})=\sup_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ (u,v_j)=0\\ 1<j<n-1}}\frac{(Lu,\ u)}{\|u\|^2},\tag{6.28}$$

那么

$$\lambda_n=\inf_{\Sigma_{n-1}\subset L^2(\Omega)}d(v_1,\ \cdots,\ v_{n-1})。\tag{6.29}$$

证明 由定理2.6.2知，L 存在特征值 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_j\to$

$-\infty(j\to\infty)$。记其对应的特征函数为 $e_1, e_2, \cdots$，且由注2.6.2知，当 $v_i=e_i(i=1,\cdots,n-1)$ 时，

$$\lambda_n=d(e_1,\cdots,e_{n-1})。$$

现在仅需证明，对任一组线性无关的元素 $\Sigma_{n-1}=\{v_1,\cdots,v_{n-1}\}$ 存在 $\varphi\in H_0^1(\Omega)$ 满足

$$\|\varphi\|=1,\ (\varphi,v_k)=0\ (k=1,\cdots,n-1), \qquad (6.30)$$

而使得

$$(L\varphi,\varphi)\geqslant\lambda_n。 \qquad (6.31)$$

事实上，取 $\varphi=\sum_{j=1}^{n}c_je_j$，使 c_j 满足

$$\sum_{j=1}^{n}|c_j|^2=1,\ \sum_{j=1}^{n}(e_j,\ v_k)c_j=0\ \ (k=1,\cdots,n-1)。 \qquad (6.32)$$

因为 $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ 和 $\{v_k\}_{k=1}^{n-1}$ 均是线性无关组，所以

$$\operatorname{rank}((e_j,v_k))=n-1,$$

从而(6.32)可解。用由此求得的 c_j 构造 $\varphi=\sum_{j=1}^{n}c_je_j$，必满足(6.30)和

$$(L\varphi,\ \varphi)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j|c_j|^2\geqslant\min(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\lambda_n。$$

故得(6.31)式，这就证明了(6.29)成立。

证毕

关于椭圆型方程Dirichlet问题的特征函数也还有许多重要性质，例如对应于第一特征值的第一特征函数在区域 Ω 内是恒正的（或恒负的），其全体构成一维子空间等，有兴趣的读者，可参考[13]。

第三章　抛物型方程与算子半群方法

§1　引　　言

本章用算子半群方法讨论抛物型方程，所介绍的方法亦适用于其他的发展型方程，例如双曲型方程、Schrödinger 方程等。

首先我们以热传导方程的初边值问题为例介绍半群方法的基本想法，在$[0,\ \pi]\times[0,\ \infty)$中考察问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0<x<\pi,\ t>0, & (1.1)\\ u(0,\ t)=0,\ u(\pi,\ t)=0, & t>0 & (1.2)\\ u(x,\ 0)=u_0(x), & 0<x<\pi, & (1.3)\end{cases}$$

这个问题可以用分离变量法求解，它的解可以用级数形式表示为：

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_0^n\, e^{-n^2 t}\sin nx\ , \tag{1.4}$$

其中

$$u_0^n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_0(x)\sin nx dx。 \tag{1.5}$$

若 $u_0(x)\in L^2[0,\ \pi]$，则(1.5)有意义，且$\sum_{n=1}^{\infty}(u_0^n)^2<\infty$。于是级数(1.4)在 $t>0$ 时是绝对收敛的。又对任一$\delta>0$，在$t\geqslant\delta$时级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_0^n e^{-n^2 t}\sin nx$ 及其关于 x 或 t 逐项求导所得的级数都是一致收敛的，故 $u(x,t)$满足 (1.1)—(1.2)，而且由

$$\int_0^{\pi}\Big|\sum_{n=1}^{\infty} u_0^n e^{-n^2 t}\sin nx-u_0(x)\Big|^2 dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(u_0^n)^2(e^{-n^2t}-1)^2$$

知，当 $t\to 0$ 时，$u(x, t)$在 $L^2[0, \pi]$ 中收敛于 $u_0(x)$，这就表示 $u(x, t)$满足(1.3)式。从而按上述意义，$u(x, t)$ 是问题(1.1)—(1.3)的解。注意到由于 $u_0(x)$仅为 L^2 函数，因此这里用到的"解"这个概念比古典解要广泛些。

如果在(1.4)式中将 t 固定，并将该式视为从 $u_0(x)$ 到 $u(x, t)$ 的一个映照，并以 $S(t)$记之，则有

$$u(x, t)=S(t)u_0(x)。\tag{1.6}$$

记$[0, \infty)$为 R_+，对 $t\in R_+$，$S(t)$是 $L^2[0, \pi]$ 到 $L^2[0, \pi]$ 的一个线性映照，又若 $t_1, t_2\in R_+$，对于任一 $u_0(x)\in L^2[0, \pi]$，

$$S(t_1)u_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(u_0^n e^{-n^2t_1})\sin nx,$$

$$S(t_2)S(t_1)u_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(u_0^n e^{-n^2t_1})e^{-n^2t_2}\sin nx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}u_0^n e^{-n^2(t_1+t_2)}\sin nx$$

$$=S(t_1+t_2)u_0(x),$$

故由 $u_0(x)$的任意性知

$$S(t_2)\cdot S(t_1)=S(t_1+t_2),\qquad t_1, t_2\geqslant 0\tag{1.7}$$

且又成立显然的事实

$$S(0)=I。\tag{1.8}$$

所以算子族 $S(t)$构成单参数半群。此外，对任一 $u_0(x)\in L^2[0, \pi]$，由于 $t\to+0$ 时 $S(t)u_0\to u_0$，所以 $S(t)u_0$ 当 $t\in[0, \infty)$时关于 t 为强连续的。又由于在 $L^2[0, \pi]$中

$$\|u(x, t)\|=\|\sum_{n=1}^{\infty}u_0^n e^{-n^2t}\sin nx\|$$

$$=(\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(u_0^n)^2 e^{-2n^2t})^{1/2}$$

$$\leqslant\left(e^{-2t}\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(u_0^n)^2\right)^{1/2}$$

$$=e^{-t}\|u_0(x)\|,$$

从而有 $\|S(t)\|\leqslant e^{t}\leqslant 1$。这表明 $S(t)$ 是压缩映照。因此，我们称 $S(t)$ 是一个单参数线性连续压缩算子半群。由前面的讨论知，初边值问题(1.1)—(1.3) 的解可以通过这个半群表为 $S(t)u_0(x)$ 的形式，一旦算子半群 $S(t)$ 被找到，(1.1)—(1.3)的解 $u(x, t)$ 也就得到了，因而初边值问题(1.1)—(1.3)的求解就化成了寻求算子半群的问题。

我们可以把问题(1.1)—(1.3)视为更一般形式的问题

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}+Au=0,\\ u|_{t=0}=u_0\end{cases}\tag{1.9}$$

的特例。这里 $u(t)$ 是取值在 Hilbert 空间中的函数（参见附录二）。这时我们所要研究的就是怎样的算子 A 可以诱导出一个单参数算子族 $S(t)$，它构成单参数线性连续压缩算子半群，并由它可以决定问题(1.9)的解 $u(t)=S(t)u_0$。

§2 算子半群及无穷小生成元

定义 3.2.1 设 H 为给定的 Hilbert 空间，$\{S(t), t\geqslant 0\}$ 是 H 上的一族线性算子，满足以下条件：

1) $S(0)=I$,

2) $S(t_1+t_2)=S(t_2)S(t_1)$, $\quad t_1, t_2\geqslant 0$,

3) $S(t)x\in C([0, \infty), H)$, $\quad \forall x\in H$,

4) $\|S(t)\|\leqslant 1$

则称 $S(t)$ 是**单参数线性连续压缩算子半群**，简称**压缩算子**

半群。

定义 3.2.2 设$\{S(t),\ t\geqslant 0\}$是 Hilbert 空间 H 上的压缩算子半群，记集合

$$D=\{x\in H,\ \lim_{h\to+0}\frac{S(h)x-x}{h}存在\},\qquad (2.1)$$

则可以定义 $D\to H$ 的算子 B 为

$$Bx=\lim_{h\to+0}\frac{S(h)x-x}{h},\qquad (2.2)$$

称 B 为算子半群 $S(t)$ 的**无穷小生成元**。

由定义 3.2.2 可知，D 是算子 B 的定义域，它是 H 中使 $S(t)x$ 在 $t=0$ 处可微分的元素 x 的全体，而 B 就表示 $S(t)$ 在 0 点关于 t 的导算子。下面讨论一个算子 B 能作为某个压缩算子半群的无穷小生成元的条件。

定理 3.2.1 对每个 $x\in D$，$S(t)x\in C^1([0,\ \infty),H)$，且有

$$S(t)x-x=\int_0^t BS(t)xdx=\int_0^t S(t)Bxdt,\quad t\geqslant 0\quad (2.3)$$

证明 若$x\in D$，且 $t>0$，则有

$$\frac{1}{h}(S(t+h)x-S(t)x)=\frac{1}{h}(S(h)-I)S(t)x$$

$$=\frac{1}{h}S(t)(S(h)x-x),h>0$$

令 $h\to+0$，由于等式最右边一项极限存在，故每一项极限存在，从而得

$$D^+S(t)x=BS(t)x=S(t)Bx,\ x\in D,\ t>0\qquad (2.4)$$

其中 D^+ 表示右导数，同理，当 $0<h<t$ 时，有等式

$$\frac{1}{h}(S(t)x-S(t-h)x)=S(t-h)\frac{1}{h}(S(h)x-x)。$$

令 $h\to+0$ 可得

$$D^{-}S(t)x = S(t)Bx, \qquad x \in D, \ t > 0 \qquad (2.5)$$

其中 D^{-} 表示左导数。(2.4)与(2.5)表明 $S(t)x \in C^1([0,\infty),H)$，且将(2.4)从 0 到 t 积分，并注意到 $S(0)=I$，即得(2.3)式

证毕

系 B 是闭算子

事实上，若 $x_n \in D$，且 $x_n \to x$，$Bx_n \to y$ 在H中成立，则对每个 $h>0$，由(2.3)知

$$\frac{1}{h}(S(h)x_n - x_n) = \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)Bx_n d\tau,$$

令 $n \to \infty$，即得

$$\frac{1}{h}(S(h)x - x) = \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)y d\tau.$$

再令 $h \to +0$，可得

$$\lim_{h \to +0}\frac{1}{h}(S(h)x - x) = S(0)y = y,$$

所以 $x \in D$，且 $Bx = y$，这就证明了 B 是闭算子。

证毕

定理 3.2.2 由 (2.1) 式所定义的D是H中的稠密集，且对任一 $t \geqslant 0$，$x \in H$，有$\int_0^t S(\tau)xd\tau \in D(B)$，以及

$$S(t)x - x = B\int_0^t S(\tau)xd\tau. \qquad (2.6)$$

证明 记 $x_t = \int_0^t S(\tau)xd\tau$，则对 $h>0$，

$$\frac{1}{h}(S(h)x_t - x_t) = \frac{1}{h}\left(\int_0^t S(\tau+h)xd\tau - \int_0^t S(\tau)xd\tau\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_h^{t+h} S(\tau)xd\tau - \int_0^t S(\tau)xd\tau\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h} S(\tau)xd\tau - \int_0^h S(\tau)xd\tau\right).$$

令 $h \to +0$，右端以 $S(t)x - x$ 为极限。由此得到 $x_t \in D$，且

$Bx_t = S(t)x - x$。又由于 $t \to 0$ 时，$\frac{1}{t}x_t \to x$，所以D在H中稠密。

证毕

下面的定理完整地回答了怎样的算子可以作为一个压缩算子半群的无穷小生成元的问题。

定理 3.2.3 设 $B: D \to H$ 是 Hilbert 空间中给定的线性算子，则 B 是某个压缩算子半群的无穷小生成元的充要条件是：(1) B 是H中的稠定闭算子，(2)对一切 $\lambda > 0$，$\lambda - B$ 是 $D \to H$ 的单映照与满映照，且 $\|\lambda(\lambda - B)^{-1}\| \leqslant 1$。

证明 先证必要性，若 B 是压缩算子半群 $\{S(t), t \geqslant 0\}$ 的无穷小生成元，则由定理 3.2.1 的推论与定理 3.2.2 知 B 是稠定闭算子。又对于 $\lambda > 0$，容易验证 $\{e^{-\lambda t}S(t); t \geqslant 0\}$ 也是一个压缩算子半群，它的无穷小生成元是 $B - \lambda$，以D为其定义域，故由(2.3)与(2.6)得

$$e^{-\lambda t}S(t)x - x = \int_0^t e^{-\lambda\tau}S(\tau)(B - \lambda)x d\tau, \quad x \in D, t \geqslant 0, \tag{2.7}$$

$$e^{-\lambda t}S(t)y - y = (B - \lambda)\int_0^t e^{-\lambda\tau}S(\tau)y d\tau, \quad y \in H, t \geqslant 0。 \tag{2.8}$$

因为 $\|e^{-\lambda t}S(t)y\| \leqslant e^{-\lambda t}\|y\|$，所以当 $t \to \infty$ 时上面两项积分收敛，另一方面由 $S(t)$ 的有界性知，当 $t \to \infty$ 时，$e^{-\lambda t}S(t)x \to 0$，$e^{-\lambda t}S(t)y \to 0$。这样，在(2.7)，(2.8)中令 $t \to \infty$即可得

$$x = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}S(\tau)(\lambda - B)x d\tau, \quad x \in D, \tag{2.9}$$

$$y = (\lambda - B)\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}S(\tau)y d\tau, \quad y \in H。 \tag{2.10}$$

由(2.9)知 $\lambda - B$ 为单映照，因为从 $(\lambda - B)x = 0$ 即可得 $x = 0$，而由(2.10)可知 $\lambda - B$ 为满映照，因为H中任一元素均在 $\lambda - B$ 的值域中。又由(2.10)式，

$$\|(\lambda-B)^{-1}y\|\leqslant\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}d\tau\|y\|=\lambda^{-1}\|y\|,\quad y\in H \qquad (2.11)$$

故有

$$\|\lambda(\lambda-B)^{-1}\|\leqslant 1。$$

再证充分性。我们分三步证明：(1) 用有界算子 B_λ 来逼近 B，(2) 利用 B_λ 作算子半群 $\{S_\lambda(t)=e^{tB_\lambda},\ t\geqslant 0\}$，(3) 说明 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}S_\lambda(t)=S(t)$ 存在，且是所要求的半群。

(1) 据定理的条件，对一切 $\lambda>0$，$\lambda-B$ 是 $D\to H$ 的单映照与满映照，且 $\|\lambda(\lambda-B)^{-1}\|\leqslant 1$，故若作 $B_\lambda=\lambda B(\lambda-B)^{-1}$，即有

$$\begin{aligned}(B_\lambda+\lambda)(\lambda-B)&=B_\lambda(\lambda-B)+\lambda(\lambda-B)\\&=\lambda B+\lambda^2-\lambda B=\lambda^2,\end{aligned}$$

因此

$$B_\lambda=-\lambda+\lambda^2(\lambda-B)^{-1}。 \qquad (2.12)$$

由此又有 $\|B_\lambda\|\leqslant 2\lambda$，故 B_λ 是定义在 H 上的线性连续算子。

由(2.12)可知，当 $x\in D$，$\lambda>0$ 时，

$$\|\lambda(\lambda-B)^{-1}x-x\|=\|\lambda^{-1}B_\lambda x\|\leqslant\lambda^{-1}\|B_\lambda x\|\leqslant\lambda^{-1}\|Bx\|,$$

从而对一切 $x\in D$，当 $\lambda\to\infty$ 时，$\lambda(\lambda-B)^{-1}x\to x$，但由于 D 是 H 中稠密集，且由 $\|\lambda(\lambda-B)^{-1}\|\leqslant 1$ 知，$\{\lambda(\lambda-B)^{-1}\}$ 关于 λ 是一致有界的，因此对一切 $x\in H$，也有 $\lambda(\lambda-B)^{-1}x\to x$。于是，当 $x\in D$ 时成立

$$B_\lambda x=\lambda(\lambda-B)^{-1}Bx\to Bx。$$

(2) 对于 H 中的线性有界算子 B_λ，定义其指数函数为

$$e^{B_\lambda}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(B_\lambda)^n}{n!}。 \qquad (2.13)$$

显见，e^{B_λ} 仍是一个线性有界算子。类似地，对 $t\geqslant 0$ 可以定义

$$S_\lambda(t)=e^{tB_\lambda},\qquad \lambda>0,\ t\geqslant 0。 \qquad (2.14)$$

容易证明 $\{S_\lambda(t),\ t\geqslant 0\}$ 构成一个压缩算子半群。事实上，定义

3.2.1 中的条件 1)、2) 显然是满足的，又以

$$\|S_\lambda(t)\| = \|\exp(t(-\lambda+\lambda^2(\lambda-B)^{-1})\|$$
$$= e^{-\lambda t}\|\exp(\lambda^2(\lambda-B)^{-1}t)\|$$
$$\leqslant e^{-\lambda t}e^{\lambda t} = 1$$

可知，$S_\lambda(t)$ 是压缩的。而当 $t_1 > t_2$ 时

$$\|(S_\lambda(t_1)-S_\lambda(t_2))x\| \leqslant \|(S_\lambda(t_1-t_2)-I)x\|$$
$$= \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((t_1-t_2)B_\lambda)^n}{n!}x\right\|$$
$$\leqslant (t_1-t_2)\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{((t_1-t_2)B_\lambda)^n}{n!}B_\lambda x\right\|,$$

从而 $S_\lambda(t)x$ 关于 t 连续。

显然，$\{S_\lambda(t), t\geqslant 0\}$ 的无穷小生成元就是 B_λ，即有

$$D_t S_\lambda(t)x = B_\lambda S_\lambda(t)x, \ \forall x \in H。$$

(3) 对任意 $x \in D$，有

$$S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x$$
$$= \int_0^t \frac{d}{d\tau}(S_\mu(t-\tau)S_\lambda(t)x)d\tau$$
$$= \int_0^t S_\mu(t-\tau)S_\lambda(\tau)(B_\lambda x - B_\mu x)d\tau,$$

于是

$$\|S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x\| \leqslant t\|B_\lambda x - B_\mu x\|。$$

由此可知，当 $x \in D$ 时，$\{S_\lambda(t)x\}$ 构成一关于个有限区间中的 t 是一致的 Cauchy 序列。于是，$S_\lambda(t)x$ 在 D 中关于 t 一致收敛。再利用 $\|S_\lambda(t)\| \leqslant 1$ 可得，对任一 $x \in H$，$S_\lambda(t)x$ 在 H 中收敛，且当 t 属于有限区间时，这种收敛是一致的。从而可定义 $S(t)$ 为

$$S(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t)x, \ \forall x \in H。 \qquad (2.15)$$

易见 $S(t)$ 是 H 中的线性算子，$S(0) = I$，$S(t_1+t_2) = S(t_2)S(t_1)$。由于 (2.15) 式中的收敛在有限区间上是一致的，且 $S_\lambda(t)x \in$

$C([0,\infty),H)$，我们即知 $S(t)x\in C([0,\infty),H)$。最后，$S(t)$ 的压缩性可以由 $S_\lambda(t)$ 的压缩性导出。从而 $S(t)$ 满足定义 3.2.1 中的全部条件，故 $\{S(t),t\geqslant 0\}$ 构成压缩算子半群。

最后需说明的是算子半群 $S(t)$ 以 B 为无穷小生成元。事实上，若 $x\in D$，$h>0$，则 $S_\lambda(t)B_\lambda x\to S(t)Bx$ 在 $0\leqslant t\leqslant h$ 上一致成立。而由于 B_λ 是算子半群 $S_\lambda(t)$ 的无穷小生成元，利用(2.3)式有

$$S_\lambda(h)x-x=\int_0^h S_\lambda(\tau)B_\lambda x d\tau。\qquad (2.16)$$

令 $\lambda\to\infty$，即得

$$S(h)x-x=\int_0^h S(\tau)Bxd\tau。$$

所以当 $x\in D$ 时，$D^+(S(0)x)=Bx$。今若记 C 为算子半群 $\{S(t);\tau\geqslant 0\}$ 的无穷小生成元，则前面已指出 $D(B)=D\subset D(C)$，且当 $x\in D$ 时 $Bx=Cx$。于是 C 是 B 的扩张，从而 $I-C$ 是 $I-B$ 的扩张。但由假设知，$I-B$ 为满映照，同时由前面必要性证明部分的推理知 $I-C$ 为单映照。故 $I-C$ 不能再在 $D(B)$ 以外定义，这就得到 $D(B)=D(C)$，从而 $B=C$，即 B 为算子半群 $\{S(t);t\geqslant 0\}$ 的无穷小生成元。

注 3.2.1 定理 3.2.3 中的条件(2)还可加强为：对一切复数 λ，若 $\mathrm{Re}\lambda>0$，则 $\lambda-B$ 是 $D\to H$ 的单映照与满映照，且 $\|(\lambda-B)^{-1}\|\leqslant(\mathrm{Re}\lambda)^{-1}$。为此，我们只需验证该条件的必要性。而事实上我们只需将(2.11)式改为

$$\|(\lambda-B)^{-1}y\|\leqslant\int_0^\infty e^{-(\mathrm{Re}\lambda)\tau}d\tau\cdot\|y\|=(\mathrm{Re}\lambda)^{-1}\|y\|,\qquad (2.11)'$$

就可将条件(2)推广到 λ 取复值的情形。

在此，$(\lambda-B)^{-1}$ 也称为算子 B 的**豫解式**。

注 3.2.2 定理 3.2.3 中的条件(2)也可减弱为：对某一列

趋于 $+\infty$ 的正数列 $\{\lambda_n\}$，使 $\lambda_n - B$ 为 $D\to H$ 的单映照与满映照，且 $\|\lambda_n(\lambda_n - B)^{-1}\|\leqslant 1$，读者试自行验证之。

定理 3.2.3 也可视为压缩算子半群的存在性定理。相应地，我们有如下唯一性定理：

定理 3.2.4 设 $T(t)$，$S(t)$ 为 H 上给定的两个压缩算子半群，它们有相同的无穷小生成元 B，即

$$\lim_{h\to+0}\frac{T(h)x-x}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{S(h)x-x}{h}=Bx, \forall x\in D(B), \quad (2.17)$$

则对 $t\geqslant 0$ 有 $T(t)=S(t)$。

证明 由(2.10)式知，对任意的 $y\in H$ 成立

$$\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}S(\tau)yd\tau=(\lambda-B)^{-1}y=\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}T(\tau)yd\tau, \forall\lambda>0。\quad (2.18)$$

今取任意的 $z\in H$ 与等式两边作内积，可得

$$\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}(S(\tau)y,z)d\tau=\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}(T(\tau)y,z)d\tau, \quad \forall\lambda>0,$$

所以对一切 $y,z\in H$，有

$$(S(t)y,z)=(T(t)y,z),$$

故 $S(t)=T(t)$。 证毕

为便于今后的应用，我们将给出定理 3.2.3 的另一形式，为此先引入下面的定义。

定义 3.2.3 设 A 为 Hilbert 空间 H 上的线性算子，若它满足

$$\mathrm{Re}(Ax, x)\geqslant 0, \quad (2.19)$$

则称算子 A 为增生的(accretive)。

定理 3.2.5 线性算子 $-A$ 可以作为 H 上某个压缩算子半群的无穷小生成元的充分必要条件是：(1) A 是 H 中的稠定闭算子，(2) A 是增生算子，(3) 对某个 $\lambda>0$，$\lambda+A$ 是满映照。

证明 我们利用定理 3.2.3 来证明本定理。先证必要性，条

件(1)、(3)可由定理 3.2.3 的必要性部分立即推得，又定理3.2.3指出，对 $\lambda>0$，$x\in D(A)$有

$$\|(\lambda+A)x\|\geqslant\lambda\|x\|。\tag{2.20}$$

两边平方，可得

$$\lambda^2\|x\|^2+2\lambda\mathrm{Re}(Ax,x)+\|Ax\|^2\geqslant\lambda^2\|x\|^2,$$

从而

$$\mathrm{Re}(Ax,x)\geqslant-\frac{1}{2\lambda}\|Ax\|^2,\tag{2.21}$$

由于 λ 可取任意值，故得(2.19)式。

再证充分性。若定理 3.2.5 的条件成立，由于A为增生算子，所以(2.21)成立。逆转刚才的运算过程，即知(2.20)也成立，所以$\lambda+A$是单映照，且$(\lambda+A)^{-1}$是定义在H上的线性有界算子，$\|\lambda(\lambda+A)^{-1}\|\leqslant1$。今对任意的$\tilde{\lambda}\in C$，有$\|(\tilde{\lambda}-\lambda)(\lambda+A)^{-1}\|\leqslant|\tilde{\lambda}-\lambda|/\lambda$，故当$|\tilde{\lambda}-\lambda|<\lambda$时，算子$I+(\tilde{\lambda}-\lambda)(\lambda+A)^{-1}$是可逆的。

现指出当$|\tilde{\lambda}-\lambda|<\lambda$时，$\tilde{\lambda}+A$也是可逆的。事实上，$\tilde{\lambda}+A=\lambda+A+(\tilde{\lambda}-\lambda)=(\lambda+A)(I+(\tilde{\lambda}-\lambda)(\lambda+A)^{-1})$，故由$\lambda+A$以及$I+(\tilde{\lambda}-\lambda)(\lambda+A)^{-1}$的可逆性知$\tilde{\lambda}+A$也可逆，这样，我们就得知，当$\tilde{\lambda}$满足$0<\tilde{\lambda}<2\lambda$时，$\tilde{\lambda}+A$都是可逆的(当然此时$\tilde{\lambda}+A$为满映照)。逐次递推可知，对一切$\lambda>0$，$\lambda+A$都是满映照。

再利用A为增生算子的性质可知，对任意$\tilde{\lambda}$，以$\tilde{\lambda}$代替λ后(2.21)式成立，从而有

$$\|(\tilde{\lambda}+A)x\|\geqslant\tilde{\lambda}\|x\|,$$

这就容易推知$\tilde{\lambda}+A$是单映照，且$\|\tilde{\lambda}(\tilde{\lambda}+A)^{-1}\|\leqslant1$。于是，由定理 3.2.3 可知，$-A$是某个压缩算子半群的无穷小生成元。

证毕

我们还可以将前面所得结果推广到更一般的算子半群上去。如果$\{S(t),\ t\geqslant0\}$是H上的线性算子族，满足定义 3.2.1 中的

条件1),2),3)，则称$S(t)$为**单参数线性连续算子半群**，或简称为**C_0算子半群**。又若$S(t)$对任意实数t有定义，且定义3.2.1中条件2)也对任意实数t_1,t_2成立，则称$S(t)$为**C_0算子群**。

定理 3.2.6 若$\{S(t),\ t\geqslant 0\}$是Hilbert空间H上的C_0算子半群，则必有与t无关的常数M和β，使得

$$\|S(t)\|\leqslant Me^{\beta t}。\tag{2.22}$$

证明 先证必有常数$a>0$，使得$\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant a}\|S(t)\|<+\infty$。若不然，则存在一列数$t_j\to 0$使$\|S(t_j)\|\to+\infty$。由$S(t)$所满足的条件知，对一切$x\in H$，有$\lim\limits_{t_j\to 0}T_{t_j}x=x$。所以由共鸣定理知$\sup\limits_{t_j}\|S(t_j)\|<+\infty$。这就导致矛盾。于是，可找到$a>0$，使$\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant a}\|S(t)\|=\mu_a$是一个有界量。

由于$S(0)=I$，所以$M_a\geqslant 1$。将M_a写成$e^{\beta a}$，则有$\beta\geqslant 0$。今对一切$t\in[0,\ \infty)$，必有非负整数n，使得$na\leqslant t<(n+1)a$。记$t=na+s$，$0\leqslant s<a$，从而

$$\begin{aligned}\|S(t)\|&\leqslant\|(S(a))^n\|\cdot\|S(s)\|\leqslant\|S(a)\|^n\cdot\|S(s)\|\\&\leqslant e^{n\beta a}\cdot M_a\leqslant M_a e^{\beta t}\end{aligned}$$

此即(2.22)式。

对于一般的C_0算子半群，也可定义其无穷小生成元，这时，作为无穷小生成元的算子B的定义域D以及算子本身的表示仍分别具有形式(2.1)、(2.2)。

仿照定理3.2.3的证明可以导出刻划一般的C_0算子半群与其无穷小生成元之间关系的基本定理如下：

定理 3.2.7 设$\{S(t);\ t\geqslant 0\}$是Hilbert空间H上的C_0算子半群，$\|S(t)\|\leqslant Me^{\beta t}$。算子$B$：$D\to H$为$S(t)$的无穷小生成元，则

(1) B是H中的稠定闭算子。

（2）对一切复数λ，若满足$\mathrm{Re}\lambda>\beta$，则$\lambda-B$是$D\to H$的单映照与满映照。且对任意n，成立

$$\|(\lambda-B)^{-n}\|\leqslant M(\mathrm{Re}\lambda-\beta)^{-n} \tag{2.23}$$

反之，若B为定义在$D\subset H$上的一个线性算子，满足条件(1),(2)，则B必为一个C_0算子半群$S(t)$的无穷小生成元，且$\|S(t)\|\leqslant Me^{\beta t}$。

证明 我们只对$\beta=0$的情形加以证明。对$\beta>0$的情形，令$S_1(t)=e^{-\beta t}S(t)$及$B_1=\beta-B$，即可化到$\beta=0$的情形。

为证必要性，只需指出(2.23)成立，因其余论断的证明与定理3.2.3的证明完全相同。如(2.10)所指出的，我们有（注意到导出(2.10)式时，我们实质上只用到$\|S(t)\|$的有界性，而不需要$S(t)$的压缩性）

$$y=(\lambda-B)\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}S(\tau)yd\tau,\qquad \forall y\in H$$

故对任意n有

$$y=(\lambda-B)^n\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{-\lambda(\tau_1+\cdots+\tau_n)}S(\tau_1+\cdots+\tau_n)yd\tau_1\cdots d\tau_n,$$

所以

$$\begin{aligned}\|(\lambda-B)^{-n}y\|&\leqslant\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty|e^{-\lambda(\tau_1+\cdots+\tau_n)}|\|S(\tau_1+\cdots+\tau_n)y\|d\tau_1\cdots d\tau_n\\&\leqslant M\|y\|\prod_{i=1}^n\int_0^\infty|e^{-\lambda\tau_i}|d\tau_i\\&\leqslant(\mathrm{Re}\lambda)^{-n}\cdot M\|y\|,\end{aligned}$$

此即(2.24)

为证充分性，也像定理3.2.3的证明那样，对实数λ，作$B_\lambda=\lambda B(\lambda-B)^{-1}$，则我们仍有：$B_\lambda$为有界算子，且其界被一个与$\lambda$无关的常数$M$所控制。故对一切$x\in D$，成立$B_\lambda x\to Bx$等事实。此外，$S_\lambda(t)=e^{tB_\lambda}$为$C_0$算子半群，它以$B_\lambda x$为无穷小生成元，且

$$
\begin{aligned}
\|S_\lambda(t)\| &= \|\exp(t(-\lambda+\lambda^2(\lambda-B)^{-1}\| \\
&= e^{-\lambda t}\cdot\sum\frac{1}{n!}\|\lambda^2 t(\lambda-B)^{-1}\|^n \\
&\leqslant e^{-\lambda t}\sum\frac{1}{n!}\lambda^{2n}t^n\lambda^{-n}\cdot M \\
&= M。
\end{aligned}
$$

再利用定理 3.2.3 中的推理方法可知，对一切 $t\geqslant 0$，$x\in H$，

$$S(t)x=\lim_{\lambda\to\infty}S_\lambda(t)x$$

存在，且 $S(t)$ 满足成 C_0 算子半群的诸性质，并且由 $\|S_\lambda(t)\|\leqslant M$ 容易推得 $\|S(t)\|\leqslant M$。

证毕

定理 3.2.7 是由 Hill 与吉田耕作分别独立建立的，它在线性算子半群理论中极为重要。

§ 3 算子半群方法在抛物型方程初边值问题中的应用

利用算子半群方法求解发展型方程定解问题时通常有以下几个步骤：首先将具体的偏微分方程定解问题（例如抛物型方程的初值问题）化成抽象的发展型方程初值问题，如 (1.9) 的形式所示。这时，在 (1.9) 中的算子 A 一般是一个微分算子，并且通过其定义域的规定已把解应满足的边界条件的要求包括在内，其次说明算子 A 满足一定的条件，从而能作出一个算子半群 $\{S(t),t\geqslant 0\}$，它以 $-A$ 为无穷小生成元。这样，抽象发展方程初值问题的解就可以用 $S(t)u_0$ 表示，再回到原始的定解问题，即得所需之解。

以下讨论抛物型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u\right)=f(x,t)$$

$$x\in\Omega\subset R^n,\ 0<t<T \tag{3.1}$$

的初边值问题，初始条件与边界条件分别为

$$u|_{t=0}=u_0(x), \tag{3.2}$$

$$u|_{\partial\Omega\times(0,T)}=0。 \tag{3.3}$$

在方程 (3.1) 左边的系数均与变量 t 无关，这种方程称为时齐的，本章中我们仅限于讨论时齐的发展方程，我们还设系数 $a_{ij}(x)$对称，$a_{ij}(x)$，$b_i(x)$，$c(x)\in c^\infty(\bar{\Omega})$，又$a_{ij}(x)$ 满足一致椭圆条件，即存在$\alpha>0$，使对任意$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$成立

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\alpha\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2。 \tag{3.4}$$

记 $H=L^2(\Omega)$，以及

$$D=\{u;\ u\in H_0^1(\Omega),\ L_0u\in H\}, \tag{3.5}$$

其中 $L_0u=-\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u\right)$，

我们有

定理 3.3.1 在上述关于方程 (3.1) 的系数的假定下，又设 $u_0(x)\in D$，$f=0$，则存在唯一的解 $u(x,t)\in C^1([0,T),H)\cap C^0([0,T),D)$，满足方程 (3.1) 与初始条件(3.3)，且对每个 $t\geqslant0$，$u\in D\subset H_0^1(\Omega)$，从而按迹的意义满足(3.2)。

证明 若对(3.1)的未知函数 u 作变换 $u=e^{\lambda t}v$，则(3.1)化成

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)-\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}+(\lambda-c(x))v$$

$$=fe^{-\lambda t}。 \tag{3.6}$$

若记

$$L_\lambda v = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) - \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i} + (\lambda - c(x))v,$$

由第二章的Gårding不等式知，存在$\lambda_0>0$，使$\lambda\geqslant\lambda_0$时．对一切$H_0^1(\Omega)$，成立

$$(L_\lambda v,\ v)\geqslant\alpha_1\|v\|_{H^1}^2。\tag{3.7}$$

由于初边值问题(3.1)—(3.3)解的存在唯一性与方程(3.6)初边值条件$v|_{t=0}=u_0(x)$，$v|_{\partial\Omega\times(0,T)}=0$的解的存在唯一性是等价的，所以我们不妨一开始就假定，对某个常数α_1，成立

$$(L_0 u,\ u)\geqslant\alpha_1\|u\|_{H^1}^2,\ \forall u\in H_0^1(\Omega)。\tag{3.8}$$

于是，记A为定义在D上的微分算子L_0，就只需讨论如下的抽象发展方程的初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}+Au=0,\\ u|_{t=0}=u_0。\end{cases}\tag{3.9}$$

显然，若算子A满足定理3.2.5的诸条件，本定理即得证。A的定义域包含$C_c^\infty(\Omega)$，而$C_c^\infty(\Omega)$在$L^2(\Omega)$中稠密，所以D在H中稠密。又若在D中有序列$\{u_n\}$，使$u_n\to u$与$Au_n\to w$在H中成立。则由

$$(A(u_n-u_m),\ u_n-u_m)\geqslant C\|u_n-u_m\|_{H^1}^2$$

可知$u_n\to u(H^1)$成立。故$u\in H_0^1(\Omega)$。又显然有$L_0u=w\in H$，所以$u\in D$，$Au=w$，即A是闭算子。

A的增生性质可由(3.7)推得，又由第二章中关于椭圆型方程解的存在性定理知，在(3.8)下，对任意$\lambda\geqslant0$，$g\in H$，必存在解$u\in H_0^1(\Omega)$，使$(\lambda+L_0)u=g$，故定理3.2.4中的条件(3)也成立。

于是由定理3.2.4可得到一个压缩算子半群S(t)（它的构造方法已在定理3.2.3中给出），使Cauchy问题(3.9)的解可以

用 $S(t)u_0$ 表示。且由定理3.2.1知，当 $u_0\in D$ 时，$u(x,t)=S(t)u_0\in C^1([0,T),H)$，又因 $u_0\in D$，故(2.3)式给出 $S(t)u_0=u_0-\int_0^t S(\tau)Au_0d\tau$，而由定理3.2.2知，$\int_0^t S(\tau)Au_0d\tau\in C^0([0,T],D)$，所以 $u(x,t)\in C^0([0,T),D)$。

再证唯一性，亦即证明

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}+Au=0,\\ u|_{t=0}=0\end{cases}$$

的 $C^1([0,T),H)\cap C^0([0,T),D)$ 解必为零解。由于 A 是增生的，故

$$\frac{d}{dt}(u(t),u(t))=2\mathrm{Re}(u'(t),u(t))$$
$$=-2\mathrm{Re}(Au,u)\leqslant 0。$$

于是

$$\|u(t)\|^2\leqslant\|u(0)\|^2=0,$$

故得唯一性，从而定理3.3.1成立。

证毕

对于 $f\neq 0$ 的情形，我们有

定理 3.3.1′ 设在问题(3.1)—(3.3)中系数 $a_{ij}(x),b_i(x),c(x)$ 以及初始资料 $u_0(x)$ 满足定理3.3.1的条件，$f\in C^1([0,T),H)$，则存在唯一的解 $u\in C^1([0,T),H)\cap C^0([0,T),D)$，按定理3.3.1的意义满足(3.1)—(3.3)。

证明 根据齐次化原理可以猜测，所讨论问题的解应当具有形式

$$u(t)=S(t)u_0+\int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau, \qquad (3.10)$$

故只需验证 $g(t)=\int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau$ 满足 $g(0)=0$ 以及方程

$\frac{dg}{dt}+Ag=f$。但 $g(0)=0$ 是显然的，又我们有

$$\frac{1}{h}(g(t+h)-g(t))=\frac{1}{h}\left(\int_0^{t+h}S(t+h-\tau)f(\tau)d\tau\right.$$

$$\left.-\int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau\right)$$

$$=\frac{1}{h}\left(\int_0^{t+h}S(z)f(t+h-z)dz-\int_0^t S(z)f(t-z)dz\right)$$

$$=\int_0^t S(z)\cdot\frac{1}{h}(f(t+h-z)-f(t-z))dz$$

$$+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}S(z)f(t+h-z)dz。$$

由于 $f(t)\in C^1([0,T),H)$，所以当 $h\to 0$ 时，$g'(t)$ 存在，且

$$g'(t)=\int_0^t S(z)f'(t-z)dz+S(t)f(0),$$

另一方面，

$$\frac{1}{h}(g(t+h)-g(t))=\frac{1}{h}\left(\int_0^t S(t+h-\tau)f(\tau)d\tau\right.$$

$$\left.-\int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau\right)+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}S(t+h-\tau)f(\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{h}(S(h)-I)g(t)+\frac{1}{h}\int_0^h S(h-z)f(z+t)dz。$$

令 $h\to 0^+$，可知 $\frac{1}{h}(S(h)-I)g(t)$ 极限存在，这说明 $g(t)\in D(A)$，且通过取极限即得

$$g'(t)=-Ag(t)+f(t),$$

这就是所需要的。

证毕

由取值于 Banach 空间的抽象函数的性质可知，定理 3.3.1

与定理 3.3.1′ 中得到的解也按广义函数的意义满足方程。

§ 4 算子半群方法在双曲型方程初边值问题中的应用

本节应用算子半群方法求解双曲型方程的初边值问题，为叙述简单起见，我们仍讨论时齐的方程，并设系数均为 C^∞ 系数。记 $L_0 u = -\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u\right)$，其系数是 $C^\infty(\bar{\Omega})$ 函数（$\Omega\subset R^n$），$a_{ij}(x)$ 对称，且满足椭圆性条件。考察双曲型方程的初边值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+L_0 u=0, \tag{4.1}$$

$$u|_{\partial\Omega\times(0,T)}=0, \tag{4.2}$$

$$u|_{t=0}=\varphi_0(x),\quad u_t|_{t=0}=\varphi_1(x)。 \tag{4.3}$$

为将问题化成抽象发展方程 Cauchy 问题的形式，引入 $v=\partial_t u$，$U=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$，则方程(4.1)可以写成

$$\partial_t u+\begin{pmatrix}0 & -I\\ L_0 & 0\end{pmatrix}u=0。 \tag{4.4}$$

作 $H_0^1(\Omega)$ 上的双线性泛函

$$a(u_1, u_2)=\iint_\Omega\left[u_1\bar{u}_2+\alpha_0\left(\sum a_{ij}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial x_j}+\sum b_i\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\bar{u}_2+cu_1\bar{u}_2\right)\right]dx,$$

式中 α_0 是待定的常数。于是记 α 为椭圆性条件(3.4)中的常数，即有

$$a(u,\ u)\geqslant\|u\|_{L^2}^2+\alpha_0\alpha\|\nabla u\|_{L^2}^2-C\alpha_0\|u\|_{L^2}^2$$

故取 α_0 充分小时，有

$$a(u,\ u)\geqslant C_1\|u\|_{H^1}^2。$$

另一方面，若取 C_2 充分大，显然有

$$a(u,\ u)\leqslant C_2\|u\|_{H^1}^2。$$

故 $a(u,\ u)$ 与 $\|u\|_{H^1}^2$ 等价，今若记 $H=H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$，则可以在$H$中定义范数为

$$\|u\|_H^2=a(u,u)+\alpha_0(v,v)\sim\|u\|_{H^1}^2+\|v\|_{L^2}^2。$$

现令

$$\mathrm{D}=\{u\in H;\ v\in H_0^1(\Omega),\ u\in H^2(\Omega)\},\qquad (4.5)$$

在D上定义算子A：$AU=\begin{pmatrix}0 & -I\\ L_0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$，则$A$是$D\to H$的映照，且当限制在$D$上考察方程组(4.4)时，已将边界条件(4.2)考虑在内。于是所考察的初边值问题可以记为

$$\begin{cases}\dfrac{dU}{dt}+AU=0,\\ u|_{t=0}=\begin{pmatrix}\varphi_0\\ \varphi_1\end{pmatrix}。\end{cases}\qquad (4.6)$$

以下我们利用定理3.2.3来证明问题(4.6)的解的存在性，即说明$-A$是某个压缩算子半群的无穷小生成元，为此先证明下面的引理。

引理 3.4.1 若 $F=\begin{pmatrix}f\\ g\end{pmatrix}\in C_c^\infty(\Omega)\times c_c^\infty(\Omega)$，则当$n$充分大时，

$$(I+n^{-1}A)U=F\qquad (4.7)$$

存在唯一解 $U\in(C^\infty(\Omega)\times C^\infty(\Omega))\cap D$，且

$$\|\boldsymbol{U}\|_H \leqslant \left(1+\frac{\beta}{n}\right)\|\boldsymbol{F}\|_H \tag{4.8}$$

式中β是与$\boldsymbol{F}$无关的一个常数。

证明 由第二章的讨论知，对于给定的L_0只要n充分大，

$$(I+n^{-2}L_0)\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}|_{\partial\Omega}=0 \tag{4.9}$$

就有唯一解$\boldsymbol{U}_1\in C^\infty(\Omega)\times C^\infty(\Omega)$。注意到

$$\begin{pmatrix} I+\frac{1}{n^2}L_0 & \\ & I+\frac{1}{n^2}L_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & -\frac{1}{n}I \\ \frac{1}{n}L_0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & \frac{1}{n}I \\ -\frac{1}{n}L_0 & I \end{pmatrix},$$

则取

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} I & \frac{1}{n}I \\ -\frac{1}{n}L_0 & I \end{pmatrix}\quad \boldsymbol{U}_1=\begin{pmatrix} u_1+\frac{1}{n}v_1 \\ v_1-\frac{1}{n}L_0u_1 \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

$\boldsymbol{U}$就满足(4.7)，且$\boldsymbol{U}\in(C^\infty(\Omega)\times C^\infty(\Omega))\cap D$。

利用分部积分，我们有

$$a(f,\ f)=(f+\alpha_0L_0f,\ f)$$

$$=\left(u-\frac{1}{n}v+\alpha_0L_0\left(u-\frac{1}{n}v\right),\ u-\frac{1}{n}v\right)$$

$$=(u+\alpha_0L_0u,\ u)-\frac{2}{n}\operatorname{Re}(u,v)-\frac{\alpha_0}{n}(L_0u,v)$$

$$-\frac{\alpha_0}{n}(L_0v,u)+\frac{1}{n^2}(v+\alpha_0L_0v,v),$$

$$\alpha_0(g,g)=\alpha_0\left(v+\frac{1}{n}L_0u,\ v+\frac{1}{n}L_0u\right)$$

$$=\alpha_0(v,v)+\frac{\alpha_0}{n}(v,L_0u)+\frac{\alpha_0}{n}(L_0u,v)+\frac{\alpha_0}{n^2}(L_0u,L_0u),$$

所以

$$\|\boldsymbol{F}\|_H^2 \geqslant (u+\alpha_0 L_0 u, u) + \alpha_0(v,v) - \frac{\alpha_0}{n}|(v, L_0 u) - (L_0 v, u)|$$

$$-\frac{2}{n}|(u,v)|$$

不等式右边第三、四项可用

$$\frac{\beta_1}{n}\|u\|_{H^1}\|v\| \leqslant \frac{\beta_1}{n}(\|u\|_{H^1}^2 + \|v\|^2) \leqslant \frac{\beta_2}{n}\|\boldsymbol{U}\|_H^2$$

来估计，所以在 n 充分大时

$$\|\boldsymbol{F}\|_H^2 \geqslant \left(1-\frac{\beta_2}{n}\right)\|\boldsymbol{U}\|_H^2.$$

此式与(4.8)式等价，由此又知当 $\boldsymbol{F}=0$ 时必有 $\boldsymbol{U}=0$，故(4.7)的解是唯一的。

定理 3.4.1 设在初边值问题 (4.1)—(4.3) 中，方程(4.1)的系数为 $C^\infty(\bar{\Omega})$ 函数，且满足椭圆性条件。又 $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$，$\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$，则该初边值问题存在唯一的解 $u \in C^2([0,T), L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T), H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,T), H^2(\Omega))$。

证明 我们先证明问题(4.6)存在解 $u \in C^1([0,T), H)$，为此需要利用定理3.2.7。由于 A 是限制在 $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ 的子集 D 上的微分算子，$C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega) \subset D$，而 $C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega)$ 在 $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ 中稠密，故 A 是稠定闭算子。

当 n 充分大时，$n+A$ 是 $D \to H$ 的单映照与满映照。事实上，若 $\boldsymbol{F} \in H$，则存在 $\boldsymbol{F}_\nu \in C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega)$，使 $\boldsymbol{F}_\nu \to \boldsymbol{F}$ 在 H 中成立。由引理 3.4.1 知存在 $\boldsymbol{U}_\nu$，满足

$$\left(I+\frac{A}{n}\right)\boldsymbol{U}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu \qquad (4.11)$$

以及

$$\|\boldsymbol{U}_\nu\| \leqslant \left(1+\frac{\beta}{n}\right)\|\boldsymbol{F}_\nu\|, \qquad (4.12)$$

$$\|U_\nu - U_\mu\| \leqslant \left(1 + \frac{\beta}{n}\right)\|F_\nu - F_\mu\|.$$

故知 $\{U_\nu\}$ 是 H 中的基本序列，且存在 U，使 $U_\nu \to U$ 在 H 中成立。由相应于 U_ν 成立的(4.9)、(4.10)可知：

$$u_{1\nu} + n^{-2}L_0 u_{1\nu} = f_\nu, \quad v_{1\nu} + n^{-2}L_0 v_{1\nu} = g_\nu,$$

$$u_\nu = u_{1\nu} + \frac{1}{n}v_{1\nu}, \quad v_\nu = v_{1\nu} - \frac{1}{n}L_0 u_{1\nu}.$$

取极限得

$$u_1 + n^{-2}L_0 u_1 = f, \quad v_1 + n^{-2}L_0 v_1 = g,$$

$$u = u_1 + \frac{1}{n}v_1, \quad v = v_1 - \frac{1}{n}L_0 u_1$$

故 u_1, v_1 以及 u 都属于 $H^2(\Omega)$。又从 u_1，$f \in H_0^1(\Omega)$ 知 $L_0 u_1 \in H_0^1(\Omega)$，从而 $v \in H_0^1(\Omega)$，所以 $U \in D$。这就说明了方程(4.7)在 n 充分大时对于 $F \in H$ 是可解的。且估计式(4.8)成立，从而当 n 充分大时 $n + A$ 是 $D \to H$ 的单映照与满映照。

由(4.8)知，$\|(I + n^{-1}A)^{-1}\| \leqslant 1 + \frac{\beta}{n}$，因而

$$\|n(n + A)^{-1}\|\left(1 - \frac{\beta}{n}\right) \leqslant 1,$$

从而对任意正整数 k，

$$\|(n - \beta)^K (n + A)^{-K}\| \leqslant 1。$$

于是由定理3.2.7（并参照注3.2.3）可知，存在一个 C_0 算子半群 $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$，它以 $-A$ 为无穷小生成元。所以发展方程的 Cauchy 问题(4.6)存在 $C^1([0, T), H)$ 解。注意到空间 $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$，且 $U = \begin{pmatrix} u \\ \partial_t u \end{pmatrix}$，再利用方程就容易得到 $u \in$

$$C^2([0,T), L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T), H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,T), H^2(\Omega)).$$

解的唯一性可以用类似于定理3.3.1的方法证明之。对此，

我们将在第四章中对更一般的情形予以证明，此处从略。

证毕

注 3.4.1 对于非齐次双曲型方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+L_0 u=f \tag{4.13}$$

取定解条件(4.2)、(4.3)时的初边值问题之求解，亦可类似定理3.3.1′进行讨论，将(4.15)化成关于$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$的方程组，其右端为$\begin{pmatrix}0\\f\end{pmatrix}$。因此，当$\begin{pmatrix}0\\f\end{pmatrix}\in C^1([0,T),H)$时，或者说，当$f\in C^1([0,T),L^2(\Omega))$时，仍可得定理3.4.1中存在唯一的解$u\in C^2([0,T),L^2(\Omega))\cap C^1([0,T),H_0^1(\Omega))\cap C^0([0,T),L^2(\Omega))$的结论。

注 3.4.2 由引理3.4.1的证明可知，当n取为充分负时，仍有相应的结论成立，此时只需将(4.8)式换成

$$\|\boldsymbol{U}\|_H\leqslant\left(1+\frac{\beta}{|n|}\right)\|\boldsymbol{F}\|_H。\tag{4.14}$$

由此易得，若条件(4.2)改为$u|_{\partial\Omega\times(-T;T)}=0$，则双典型方程初边值问题(4.1)—(4.3)不仅往$t>0$方向可解，而且往$t<0$方向也可解。这与抛物型方程相比较，有本质的区别。

§ 5 Schrödinger 方程

Schrödinger 方程是量子力学中的一个基本方程。线性Schrödinger 方程的形式为

$$\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u-V(x)u, \tag{5.1}$$

其中函数 $V(x)$ 称为位势。本节中我们利用算子半群方法来考察方程(5.1)的Canchy 问题。

先讨论 $V(x)=0$ 的情形。取 $H=L^2(R^n)$，$D=H^2(R^n)$，并在D上定义算子A：$Au=i\Delta u$。

引理 3.5.1 算子iA是$L^2(R^n)$中的自共轭算子。

证明 利用分部积分法，对于$u,v\in H^2(R^n)$，有

$$(-\Delta u,v)=-\int_{R^n}\Delta u\cdot\bar{v}dx=-\int_{R^n}u\overline{\Delta u}dx=(u,-\Delta v),$$

所以$iA=-\Delta$是对称算子。故为说明iA为自共轭算子，只需指出对于任一个使$\mathrm{Im}\lambda\neq 0$的复数λ，$\lambda I\to iA$的值域在$L^2(R^n)$中稠密（参见[10]）。但是，若$f\in C_0^\infty(R^n)$，由Fourier变换的性质知

$$u(x)=(2\pi)^{-n}\int_{R^n}\frac{\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}}{\lambda-|\xi|^2}d\xi \tag{5.2}$$

属于$H^2(R^n)$，且满足$(\lambda I-iA)u=f$，因此$\lambda I-iA$的值域在$L^2(R^n)$中稠密。 证毕

定理 3.5.1 当且仅当iA为Hilbert空间H的自共轭算子时，A为某个酉算子群的无穷小生成元。

证明 若A为酉算子群$U(t)$的无穷小生成元，则A为稠定闭算子，且对$x\in D(A)$，

$$-Ax=\lim_{t\to 0}-\frac{1}{t}(U(t)x-x)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(U(t)^{-1}x-x)$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(U(t)^*x-x)=A^*x,$$

所以$A\subseteq -A^*$。同样的推理过程可以对$x\in D(A^*)$进行，得到$A^*\subseteq -A$，故$A^*=-A$，$iA=(iA)^*$，从而iA为自共轭的。

今若iA为自共轭算子，则A是稠定闭算子，且$A=-A^*$。故对$x\in D(A)$有

$$(Ax,x)=(x,A^*x)=-(x,Ax)=-(Ax,x),$$

从而 $\mathrm{Re}(Ax,x)=0$，且 $\mathrm{Re}(A^*x,x)=-\mathrm{Re}(Ax,x)=0$，即定理3.2.5的条件(2)也满足。再根据自共轭算子的性质知，对任一纯虚数 $i\lambda$，有 $i\lambda\pm iA$ 为满映照。故 $\lambda\pm A$ 为满映照。从而由定理3.2.5知 $\mp A$ 都可视为某个压缩算子半群的无穷小生成元。记这两个半群为 $U_\pm(t)$，定义

$$U(t)=\begin{cases}U_+(t), & t\geqslant 0,\\ U_-(-t), & t\leqslant 0,\end{cases} \tag{5.3}$$

则 $U(t)$ 构成群，它关于参数 t 连续，且对任一 $x\in D(A)$，

$$\lim_{t\to+0}\frac{U(t)-I}{t}x=\lim_{t\to+0}\frac{U_+(t)-I}{t}x=-Ax,$$

$$\lim_{t\to-0}\frac{U(t)-I}{t}x=\lim_{t\to-0}\frac{U_-(-t)-I}{t}x=-\lim_{t\to+0}\frac{U_-(t)-I}{t}x$$
$$=-Ax,$$

所以 $-A$ 为 C_0 算子群 $U(t)$ 的无穷小生成元。

证毕

这样，根据定理3.5.1，我们就可以构造 C_0 算子群（它还是酉算子群）$U(t)$，使对一切 $u_0(x)\in H^2(R^n)$，函数 $u(x,t)=U(t)U_0(x)$ 是 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=i\Delta u\\ u|_{t=0}=u_0(x)\end{cases} \tag{5.4}$$

的解。

以下考察 $V(x)\neq 0$ 的情形。我们设 $V(x)$ 为实函数，$V(x)\in L^p(R^n)$，$p\geqslant 2$，$p>\dfrac{n}{2}$。此时，取

$$D=\{u;\ u\in H^2(R^n),\ V(x)u\in L^2(R^n)\}。 \tag{5.5}$$

引理 3.5.2 设 $V(x)$ 如前所述，则对 $\varepsilon>0$ 有

$$\|Vu\| \leqslant \varepsilon\|\Delta u\| + C(\varepsilon)\|u\|, \quad \forall u \in D。 \tag{5.6}$$

证明 由于 $u \in D$，故对 $q = \dfrac{2p}{2+p}$，取 $r = \dfrac{p}{q}$，$r' = \dfrac{2}{q}$，

$$\left(\int_{R^n} |\hat{u}(\xi)|^q d\xi\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_{R^n} (1+|\xi|^2)^{-q}(1+|\xi|^2)^q |\hat{u}(\xi)|^q d\xi\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant \left(\int_{R^n} (1+|\xi|^2)^{-rq} d\xi\right)^{\frac{1}{r}\frac{1}{q}} \left(\int_{R^n} \left((1+|\xi|^2)|\hat{u}(\xi)|\right)^{r'q} d\xi\right)^{\frac{1}{r'}\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\int_{R^n} (1+|\xi|^2)^{-p} d\xi\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{R^n} (1+|\xi|^2)^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C(\|\Delta u\| + \|u\|),$$

所以

$$\|u\|_{q'} \leqslant C(\|\Delta u\| + \|u\|)。 \tag{5.7}$$

由于(5.7)式中诸范数都是在全空间 R^n 中的积分，故可作变换 $x = \rho x'$，而由(5.7)导出

$$\|u\|_{q'} \leqslant \varepsilon\|\Delta u\| + C(\varepsilon)\|u\|。$$

再注意到 $\dfrac{p}{2}$ 的共轭数为 $\dfrac{p}{p-2} = 2q'$，故

$$\|Vu\|^2 = \int_{R^n} V^2 u^2 dx$$

$$\leqslant \left(\int_{R^n} |V|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{R^n} |u|^{\frac{2p}{p-2}}\right)^{\frac{p-2}{p}}$$

$$\leqslant C\|u\|_{q'}^2,$$

从而得(5.6)式。

证毕

定理 3.5.2 在上述关于位势 $V(x)$ 的假定下，算子 $iA+V$ 仍为自共轭的，从而(5.1)取初值 $u_0(x) \in D$ 的 Cauchy 问题可解。

证明 由于 $iA+V$ 为对称算子，所以为说明 $iA+V$ 为自共轭算子，也只需证明 $I \pm (A - iV)$ 的值域为全空间。

在(5.6)中取定$\varepsilon=\frac{1}{2}$。则$\|Vu\|\leqslant\frac{1}{2}\|Au\|+C\|u\|$，以下我们指出，存在$\delta>0$，使得当$I\pm(A-it_0V)$的值域为全空间时，对满足$|t-t_0|<\delta$的$t$，也有$I\pm(A-itV)$的值域为全空间。

为确定起见，讨论$I-(A-it_0V)$。以$R(t_0)$记$(I-(A-it_0V))^{-1}$。

由于

$$
\begin{aligned}
&((I-(A-it_0V))u,\ (I-(A-it_0V))u)\\
&=(u,u)+(A-it_0V)u,\ (A-it_0V)u)\\
&\geqslant\|u\|^2,
\end{aligned}
$$

所以$\|R(t_0)\|\leqslant 1$。

今有

$$
\begin{aligned}
I-(A-itV)&=I-(A-it_0V)+(t-t_0)V\\
&=(I+(t-t_0)VR(t_0))(I-(A-it_0V)),
\end{aligned}
$$

而对任一$u\in H$，

$$
\|VR(t_0)u\|\leqslant\frac{1}{2}\|AR(t_0)u\|+C\|R(t_0)u\|
$$

$$
\leqslant\frac{1}{2}\|(A-it_0V)R(t_0)u\|+\frac{1}{2}t_0\|VR(t_0)u\|+C\|R(t_0)u\|。
$$

注意到$t_0<1$，有

$$
\begin{aligned}
\|VR(t_0)u\|&\leqslant\|(A-it_0V)R(t_0)u\|+2C\|R(t_0)u\|\\
&=\|(I-R(t_0))u\|+2C\|R(t_0)u\|\\
&\leqslant(2+2C)\|u\|。
\end{aligned}
$$

因此，只要取$\delta<\frac{1}{2(1+C)}$，算子$I+(t-t_0)VR(t_0)$就是可逆的。由此知$I-(A-itV)$的值域为全空间。

于是，我们由$I-A$为满映照出发，关于t逐次延拓，即可知$I-(A-itV)$对一切$0\leqslant t\leqslant 1$均为满映照。从而算子$I+(A-iV)$

的值域为全空间。显然，同样的结论对算子 $I+(A-iV)$ 也成立。故 $iA+V$ 为自共轭算子。再利用与定理3.5.1中同样的推理方法可知，(5.1)的Cauchy问题可解。

证毕

第四章 双曲型方程

§ 1 能量不等式、唯一性、稳定性和有限依赖性

本章中我们讨论二阶双曲型方程与对称双曲组的Cauchy问题和初边值问题，为简单起见，我们仅限于在实函数范围内进行讨论，这一节先介绍能量不等式。

设在柱型区域 $Q=\Omega\times(0,T)$ 中给定二阶方程

$$Lu\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j})\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x,t)u\right)=f(x,t) \quad (1.1)$$

其中系数 a_{ij},b_i,c 都是 $\bar{Q}$ 上的 C^∞ 函数，$a_{ij}=a_{ji}$，且满足一致椭圆性条件。我们考察（1.1）的两类定解问题，其一是Cauchy问题，此时 $\Omega=R^n$，初始条件为

$$\begin{aligned}\gamma_0 u&\equiv u|_{t=0}=\varphi_0(x),\\ \gamma_1 u&\equiv u_t|_{t=0}=\varphi_1(x)。\end{aligned} \quad (1.2)$$

其二是初边值问题，此时 Ω 为一个具光滑边界的有界区域，初始条件的形式与（1.2）相同，边界条件为

$$u|_{\partial\Omega\times(0,T)}=0, \quad (1.3)$$

这里为简单起见，仅考虑Dirichlet边界条件的情形。

为导出关于双曲算子的能量不等式，先给出如下引理。

引理 4.1.1 （Gronwall不等式）设 $I(t)$ 是定义在 $[0,T]$ 上的一个非负连续可微函数，且满足 $I(0)=0$，

$$\frac{dI}{dt} \leqslant CI(t) + M, \tag{1.4}$$

则成立不等式

$$I(t) \leqslant \frac{M}{C}(e^{ct} - 1) \quad 和 \quad \frac{dI}{dt} \leqslant Me^{ct} \tag{1.5}$$

证明 以 e^{-ct} 乘以 (1.4) 式两边，得

$$e^{-ct}\frac{dI}{dt} - Ce^{-ct}I(t) \leqslant Me^{-ct},$$

积分之，利用 $I(0)=0$ 可得

$$I(t)e^{-ct} \leqslant \int_0^t Me^{-ct}dt = \frac{M}{C}(1 - e^{-ct}),$$

所以

$$I(t) \leqslant \frac{M}{C}(e^{ct} - 1),$$

代入 (1.4)，又得 (1.5) 的第二式。

证毕

上述证明过程相当于求与 (1.4) 相应的微分方程的解，并用此解来控制满足 (1.4) 的 $I(t)$，利用这一思想可以将 Gronwall 不等式作各种推广。例如 (1.4) 式右边 M 为 t 的函数，或 (1.4) 式改为关于 $I(t)$ 的高阶微分的不等式等情形，都有相应的结论。

定理 4.1.1 设 Ω 为有界区域，$u \in C^\infty(\bar{Q})$ 满足 $u|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0$，$Lu = f$。若记

$$E(t) = \int_\Omega (u^2 + u_t^2 + \Sigma u_{x_i}^2)dx,$$

则成立能量不等式

$$E(t) \leqslant C\left(E(0) + \int_{Q_t} f^2 dxdt\right), \tag{1.6}$$

式中 $Q_t = \Omega \times (0,t)$。

证明 以u_t乘以Lu，并在Q_t上积分，可得

$$\int_{Q_t} u_t Lu dxdt = I_1(t) + I_2(t),$$

其中

$$I_1(t) = -\int_{Q_t}\left(\sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu\right)u_t dxdt,$$

$$|I_1(t)| \leqslant M\int_{Q_t}(u^2 + u_t^2 + \sum u_{x_i}^2)dxdt$$

$$= M\int_0^t E(t)dt,$$

$$I_2(t) = \int_0^t\int_\Omega u_t\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right]dxdt.$$

由于u在边界$\partial\Omega\times(0,T)$上为零，故$u_t$也在边界上为零，所以有

$$-\int_0^t\int_\Omega u_t\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)dxdt$$

$$=\int_0^t\int_\Omega\sum_{i,j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial t}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}dxdt$$

$$=\int_0^t\int_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i,j}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right.$$

$$-\sum_{i,j}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}$$

$$\left.-\sum_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_i}a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial t}\right]dxdt.$$

利用系数a_{ij}的对称性可得

$$\int_0^t\int_\Omega\sum_{i,j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial t}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}dxdt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i,j}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)dxdt$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dxdt。$$

所以

$$I_2(t)=\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\sum_{i,j}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)dxdt$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dxdt。$$

最后一项可以并入 $I_1(t)$ 进行估计，于是有

$$\int_0^t\int_\Omega u_t\, Lu\,dxdt=\frac{1}{2}\left[\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right.$$

$$\left.+\sum_{i,j}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx\right]_0^t+\bar{I}_1(t)。$$

利用 a_{ij} 的正定性，可得

$$\int_\Omega(u_t^2+\alpha\Sigma u_{x_i}^2)dx\big|_{t=t}\leqslant C_1\int_\Omega(u_t^2+\Sigma u_{x_i}^2)dx\big|_{t=0}$$

$$+\int_0^t\int_\Omega u_tLudxdt+C_1\int_0^t E(t)dt \tag{1.7}$$

$$\int_\Omega(u_t^2+\Sigma u_{x_i}^2)dx\leqslant C_2\left(E(0)+\int_0^t\int_\Omega(Lu)^2dxdt\right.$$

$$\left.+\int_0^t E(t)dt\right)。 \tag{1.8}$$

又利用 $u(x,t)=u(x,0)+\int_0^t u_t dt$，有

$$u^2(x,t)\leqslant 2u^2(x,0)+2t\int_0^t u_t^2dt$$

$$\int_\Omega u^2(x,t)dx\leqslant C_2\int_\Omega u^2(x,0)dx+2t\int_0^t\int_\Omega u_t^2dxdt,$$

将此式与（1.8）合并，可得

$$E(t)\leqslant C_3\left(E(0)+\int_{\Omega_t}(Lu)^2dxdt+\int_0^t E(t)dt\right)。$$

对任意的t_1，取

$$M = C_3\left(E(0) + \int_{Q_{t_1}} (Lu)^2 dxdt\right),$$

$$I(t) = \int_0^t E(t)dt,$$

则利用引理 4.1.1 知，在$t \leqslant t_1$时，

$$E(t) \leqslant M e^{C_3 t}$$

令$t = t_1$，得

$$E(t_1) \leqslant C_3 e^{C_3 t_1}\left(E(0) + \int_{Q_{t_1}} (Lu)^2 dxdt\right),$$

此即 (1.6) 式。

证毕

注 4.1.1 由于在 (1.6) 式中只出现u的直至二阶导数的平方积分，故通过极限过程容易证明当$u \in H^2(Q)$时能量不等式仍然成立。

注 4.1.2 由 (1.6) 式立即可以得到$H^2(Q)$解的唯一性与稳定性，其稳定性的意义为当$\|u(\cdot,0)\|_{H^1(\Omega)}$，$\|u_t(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}$及$\|Lu\|_{L^2(Q)}$充分小时，对任意$t \in [0,T]$，$\|u(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}$及$\|u_t(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}$也充分小。

注 4.1.3 若在边界上定义

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum_{i,j} a_{ij} \cos(n, x_i) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

将边界条件

$$u|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0$$

改为

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u\right]_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0.$$

其中 $\sigma>0$，则相应的能量不等式仍然成立。

以下讨论 Cauchy 问题的能量不等式。先引入类空向曲面的概念。

定义 4.1.1 若 S 为 $(t,x_1,\cdots,x_n)$ 空间中给定的曲面，算子 L 按 (1.1) 给定，又若 S 上每一点的法向 $\boldsymbol{n}$ 满足

$$\cos^2(\boldsymbol{n},t)\geqslant\sum_{i,j}a_{ij}\cos(\boldsymbol{n},x_i)\cos(\boldsymbol{n},x_j),\qquad(1.9)$$

则称 S 为**弱类空向曲面**。若 (1.9) 中不等号为严格大于号，则称 S 为**类空向曲面**；若 (1.9) 式恒为等式，则称 S 为**特征曲面**。

今设 P 为半空间 $\{t>0\}$ 中一点，过 P 往下作一弱类空向曲面 Γ_P，即 Γ_P 的法向满足 (1.9) 式。该曲面与 $t=0$ 围成一个区域 Q。对任意的 $h(0<h<t_P)$，作 $t=h$ 平面，它与 Q 的交记为 Ω_h。区域 Q 被夹在 $t=0$ 与 $t=h$ 之间的部分记为 Q_h，且定义

$$E(h)=\int_{\Omega_h}(u^2+u_t^2+\Sigma u_{x_i}^2)dx,\qquad(1.10)$$

则有下述定理。

定理 4.1.2 在上述记号下，设 $u\in C^\infty(\bar{Q})$，则成立

$$E(t)\leqslant C\left(E(0)+\int_{Q_t}(Lu)^2dxdt\right).\qquad(1.11)$$

证明 证明的过程与前相仿，区别在于对 $I_2(t)$ 中的积分项

$$-\int_{Q_h}u_t\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)dxdt$$

作变形时不能再利用边界条件，故对各项积分的估计均应作适当修改。今若记 $S_h=Q_h\cap\Gamma_P$，则

$$-\int_{Q_h}u_t\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)dxdt$$

$$=\int_{Q_h}\sum_{i,j}\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial t}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}dxdt$$

$$-\int_{S_h}\sum_{i,j} u_t a_{ij} u_{x_j}\cos(\boldsymbol{n},x_i)dS$$

$$=\int_{Q_h}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i,j} a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\right)dxdt$$

$$-\int_{Q_h}\sum_{i,j}(a_{ij})_t u_{x_i}u_{x_j}dxdt$$

$$-\int_{Q_h}\sum_{i,j}a_{ij}u_{x_i}u_{x_jt}dxdt$$

$$-\int_{S_h}\sum_{i,j}u_t a_{ij}u_{x_j}\cos(\boldsymbol{n},x_i)dS,$$

由此得

$$-\int_{Q_h}u_t\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)dxdt$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_{\Omega_h}\sum_{i,j}a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}dx\right.$$

$$\left.-\int_{\Omega_0}\sum_{i,j}a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}dx\right)$$

$$-\frac{1}{2}\int_{Q_h}\sum_{i,j}(a_{ij})_t u_{x_i}u_{x_j}dxdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{S_h}\sum_{i,j}(a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\cos(\boldsymbol{n},t)$$

$$-2a_{ij}u_t u_{x_j}\cos(\boldsymbol{n},x_i))dS.$$

又

$$\int_{Q_h}u_t u_{tt}dxdt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\Omega_h}u_t^2dx-\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}u_t^2dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_{S_h}u_t^2\cos(\boldsymbol{n},t)dt,$$

从而在对 $I_2(t)$ 作估计时，得到在 S_h 上的积分为

$$\frac{1}{2}\int_{S_h}\Big(u_t^2\cos(\boldsymbol{n},t)+\sum_{i,j}a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\cos(\boldsymbol{n},t)$$

$$-2\sum_{i,j}a_{ij}u_tu_{x_j}\cos(\boldsymbol{n},x_i)\Big)dS$$

$$=\frac{1}{2}\int_{S_h}\frac{1}{\cos(\boldsymbol{n},t)}\Big(u_t^2\big(\cos^2(\boldsymbol{n},t)$$

$$-\sum_{i,j}a_{ij}\cos(\boldsymbol{n},x_i)\cos(\boldsymbol{n},x_j)\big)$$

$$+\sum_{i,j}a_{ij}\big(u_{x_i}\cos(\boldsymbol{n},t)-u_t\cos(\boldsymbol{n},x_i)\big)$$

$$\times\big(u_{x_j}\cos(\boldsymbol{n},t)-u_t\cos(\boldsymbol{n},x_j)\big)\Big)dS$$

$$\geqslant 0. \tag{1.12}$$

这里最后这个不等号是由 (a_{ij}) 的正定性与边界 S 为弱类空向曲面的特性所得出的。利用 (1.12) 就可以导出

$$\int_{\Omega_h}(u_t^2+\Sigma u_{x_i}^2)dx\leqslant C\Big(E(0)+\int_0^h\int_{\Omega_t}(Lu)^2dxdt$$

$$+\int_0^h E(t)dt\Big),$$

以后的推导与定理 4.1.1 完全一致。

证毕

与定理 4.1.1 相仿，当 $u\in H^2(Q)$ 时也有能量不等式 (1.11) 成立。

利用定理 4.1.2，可以得到 Cauchy 问题解的唯一性与稳定性，然而我们还可以得到进一步的结论。事实上，若已知

$$u\in H^2(R^n\times(0,T)),\ Lu=0,$$

则当 u 及 u_t 在 Ω_0 上为零时，在整个 Q 上 u 恒等于零，而不管 u 及 u_t 在 Ω_0 外取什么初值。换句话说，u 在 Q 中的值唯一地由有限区域 Ω_0 上的初值唯一决定，而初始时刻在 Ω_0 外的初值变化不会影响到 u 在 Q 中的取值。这就得出，二阶双曲型方程的解有有限

依赖区域或有限决定区域的特性。且当 $Lu\neq 0$ 时，这一特性仍可作相应的表述。在数学物理方程课程中我们已知波动方程的解有这种特性，定理 4.1.2 就把这一性质推广到了一般二阶双曲型方程的情形。由于在确定 P 点的依赖区域时，Γ_P 可取为任一弱类空向曲面，故若取它为特征曲面，就可得到准确的依赖区域。

§ 2　Cauchy 问题解的存在性

能量不等式还可以用于证明双曲型方程解的存在性。本节中先讨论 Cauchy 问题解的存在性，我们将利用解析逼近法结合能量不等式来证明这一点。

首先我们要把能量不等式 (1.9) 推广到高阶模的估计。对于 $C^\infty(\bar{\Omega})$ 函数 u，以 $\|u(h)\|_r$ 记 $u(\cdot,h)$ 在 $\Omega_h=\Omega\cap\{t=h\}$ 上的 H^r 模，则有下述定理。

定理 4.2.1　设 $u\in C^\infty(\bar{\Omega})$ 在 $t=0$ 上取初值

$$u|_{t=0}=\varphi_0(x),\quad u_t|_{t=0}=\varphi_1(x),$$

则对 $r\geqslant 1$ 成立

$$\|u(h)\|_r^2\leqslant C_r\left(\|\varphi_0\|_r^2+\|\varphi_1\|_{r-1}^2+\int_0^h\|Lu(\cdot,t)\|_{r-1}^2dt\right)。\tag{2.1}$$

证明　用归纳法。当 $r=1$ 时，(2.1) 可由 (1.11) 推得。今设 (2.1) 式当指标小于 r 时成立，以下证明当指标等于 r 时此式也成立。以 $\partial_x^\alpha(|\alpha|\leqslant r-1)$ 作用于 Lu，可得

$$L(\partial_x^\alpha u)=\partial_x^\alpha Lu+Ru,\tag{2.2}$$

其中 Ru 为 u 及其关于 x 的直到 r 阶导数的线性表示式。利用 $r=1$ 时的 (2.1) 式可得

$$\|\partial_x^\alpha u(h)\|_1^2\leqslant C_1(\|\partial_x^\alpha u(0)\|_1^2+\|\partial_t\partial_x^\alpha u(0)\|_0^2$$

$$+\int_0^h (\|\partial_x^\alpha Lu\|_0^2 + \|u(t)\|_r^2)dt)。\qquad (2.3)$$

将 (2.3) 关于所有满足 $|\alpha|\leqslant r-1$ 的重指标 α 作和，得

$$\|u(h)\|_r^2\leqslant C_1'(\|\varphi(0)\|_r^2+\|\varphi_1(0)\|_{r-1}^2$$

$$+\int_0^h(\|Lu\|_{r-1}^2+\|u\|_r^2)dt),$$

再利用 Gronwall 不等式，可得 (2.1) 式关于指标 r 也成立。

证毕

注 4.2.1 比 (2.1) 更一般的能量不等式为

$$\sum_{j=0}^{r}\|\partial_t^j u(h)\|_{r-j}^2\leqslant C_r'(\|\varphi_0\|_r^2+\|\varphi_1\|_{r-1}^2$$

$$+\int_0^h\sum_{j=0}^{r-1}\|\partial_t^j f(\cdot,t)\|_{r-j-1}^2dt),\qquad (2.4)$$

式中 $f(\cdot,t)=L_H u(\cdot,t)$，$r\geqslant1$。这个不等式的证明方法与定理 4.2.1 类似，此处略。

注 4.2.2 若 $u\in H^{r+1}(Q)$，则 (2.1) 与 (2.4) 式仍然成立。

注 4.2.3 在 (2.1) 与 (2.4) 中的常数 C_r 与 C' 仅与算子 L 的系数的前 r 阶最大模有关。

现在转向讨论双曲型方程 Cauchy 问题解的存在性，我们仍限于讨论齐次方程的情形，对于非齐次方程的情形，容易由齐次化原理导出。

设 L 是如上节所述的一个具有 C^∞ 系数的二阶线性双曲算子，考虑 Cauchy 问题

$$Lu=0,\qquad (2.5)$$

$$u|_{t=0}=\varphi_0(x),\quad u_t|_{t=0}=\varphi_1(x)。\qquad (2.6)$$

设 P 为位于半空间 $\{t>0\}$ 中一点，过 P 作出的弱类空向曲面与 $t=0$ 平面围成的区域记成 Q，相应地，Ω_h，Q_h 的意义同上节所述，则有下述定理。

定理 4.2.1 在上面关于算子 L 的系数的假定下，又设

$$\varphi_0\in H^r(\Omega_0),\ \varphi_1\in H^{r-1}(\Omega)\quad(r\geqslant 1),$$

则问题 (2.5),(2.6) 存在唯一解 u，它在每个截面 Ω_h 上满足

$$\partial_t^j u\in H^{r-j}(\Omega_h)\quad(0\leqslant h<t_P,0\leqslant j\leqslant r).$$

证明 首先我们就 L_H 的系数和初始条件中的 φ_0，φ_1 都是解析函数的情形来构造解，然后利用逼近法去掉关于解析性的限制。

1） 设 L 的系数解析，φ_0,φ_1 为多项式，则由于 Ω_0 为有限区域，所以由 Cauchy-Kovalevskii 定理知，在 $0\leqslant t\leqslant\delta$ 的一层内，存在 $Lu=0$，$u|_{t=0}=\varphi_0$，$u_t|_{t=0}=\varphi_1$ 的解，这个解可以用幂级数法构造而得，而且解的存在范围即高度 δ 仅取决于方程的系数，而与初始条件无关，又由上节证明的能量不等式可知，这个解是唯一的。

2） 我们说明上述解可以延拓到全区域 Q 上，而且在 L 的系数为解析函数的假定下，只要 φ_0,φ_1 为 H^{r+1} 与 H^r 函数，就可以得到在 Q 中的解。事实上，由于 Ω_0 为有限区域，我们可以选取多项式序列 $\{\varphi_{0k}\},\{\varphi_{1k}\}$，使 $\varphi_{0k}\to\varphi_0(H^{r+1}(\Omega_0))$ 与 $\varphi_{1k}\to\varphi_1(H^r(\Omega_0))$。由 1）中已证明的事实知，对每组 φ_{0k}、φ_{1k}，可以在 Q_δ 中得到

$$Lu=0,\ u|_{t=0}=\varphi_{0k},\ u_t|_{t=0}=\varphi_{1k}$$

的解 u_k。这里特别需指出的是，δ 的大小只与方程系数 a_{ij}，b_i,c 的解析结构有关（指幂级数展开式的收敛半径、最大模），而与初始条件无关，故 δ 与 k 无关。于是，由在 Q_δ 中的能量不等式可得

$$\sum_{j=0}^{r+1}\|\partial_t^j(u_k(t)-u_{k'}(t))\|^2\leqslant C(\|\varphi_{0k}-\varphi_{0k'}\|_{r+1}^2$$

$$+\|\varphi_{1k}-\varphi_{1k'}\|_r^2)。\tag{2.7}$$

从而由 $\{\varphi_{0k}\},\{\varphi_{1k}\}$ 在相应空间中的收敛性知，对每个 $t\in[0,\delta]$，$0\leqslant j\leqslant r+1$，$\{\partial_t^j u_k(t)\}$ 是 $H^{r+1-j}(\Omega_t)$ 中的基本序列，从而有极

限 $\partial_t^j u(t)$。

因为在 $t=\delta$ 时，$u(\delta)$ 及 $u_t(\delta)$ 分别属于 $H^{r+1}(\Omega_\delta)$ 与 $H^r(\Omega_\delta)$，故可利用它们作为 $t=\delta$ 时的初值，再继续向 t 增加的方向求解。由于 δ 的大小只与 L 的系数有关，故只要这些系数在包含 $\bar{Q}$ 的某个开集内解析，那末所得解的存在区域的高度 δ 就可以先于初始条件予以确定，从而经过有限步以后，就可得到整个区域 Q 上解的存在性。

3） 当 L 的系数非解析时，可以取解析函数序列 $\{a_{ij}^k\}$，$\{b_i^k\}$，$\{c^k\}$，它们在含 $\bar{Q}$ 的某个开集内解析，且在 $\bar{Q}$ 上诸函数及其直到 $r+1$ 阶导数分别收敛于 a_{ij}, b_i, c 及其相应的导数，对每个 k，将算子 L 中系数 a_{ij}, b_i, c 用 a_{ij}^k, b_i^k, c^k 代替后所得到的算子记为 L^k，考虑 Cauchy 问题

$$L^k u = 0, \tag{2.8}$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad u_t|_{t=0} = \varphi_1(x) \tag{2.9}$$

由前面的讨论知，(2.8)，(2.9) 的解 u_k 存在，

$$\partial_t^j u_k(t) \in H^{r+1-j}(\Omega_t)$$

对 $0 \leqslant j \leqslant r+1$，$0 \leqslant t < t_P$ 成立，且有

$$\sum_{j=0}^{r+1} \|\partial_t^j u_k(t)\|_{r+1-j}^2 \leqslant C(\|\varphi_0\|_{r+1}^2 + \|\varphi_1\|_r^2)。\tag{2.10}$$

由注 4.2.3，这里的常数 C 依赖于 a_{ij}^k, b_i^k, c^k 的前 $r+1$ 阶导数的最大模。由于 a_{ij}^k, b_i^k, c^k 的前 $r+1$ 阶导数分别一致收敛于 a_{ij}，b_i, c 的相应导数，故 C 与 k 无关。

现在考虑 $\{u_k\}$ 的收敛性。为此，估计 $u_k - u_{k'}$，它满足方程

$$L^k(u_k - u_{k'}) = f_{kk'}, \tag{2.11}$$

式中

$$f_{kk'} = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left((a_{ij}^{k'} - a_{ij}^k)\frac{\partial u_{k'}}{\partial x_j}\right)$$

$$+\sum_i (b_i^{k'}-b_i^k)\frac{\partial u_{k'}}{\partial x_i}+(c^{k'}-c^k)u_{k'}.$$

$u_k-u_{k'}$ 还满足初始条件

$$(u_k-u_{k'})(x,0)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_k-u_{k'})(x,0)=0。$$

易见，对一切满足 $0\leqslant t<t_P$ 的 t，

$$\sum_{j=0}^{r-1}\|\partial_t^j f_{kk'}(t)\|_{r-1-j}^2\leqslant\varepsilon_{kk'}\sum_{j=0}^{r}\|\partial_t^j u_{k'}(t)\|_{r+1-j}^2$$

$$\leqslant C\varepsilon_{kk'}(\|\varphi_0\|_{r+1}^2+\|\varphi_1\|_r^2),$$

式中 $\varepsilon_{kk'}$ 在 $k,k'\to\infty$ 时趋于零，于是由 (2.4) 式知

$$\sum_{j=0}^{r}\|\partial_t^j(u_k(t)-u_{k'}(t))\|_{r-j}^2\leqslant C'\varepsilon_{kk'}(\|\varphi_0\|_{r+1}^2+\|\varphi_1\|_r^2)。$$

所以当 $k,k'\to\infty$ 时，该式左端也趋于零。这说明 u_k 存在极限 u，且 $\partial_t^j u(t)\in H_{r-j}(\Omega_t)$ 对 $0\leqslant t<t_P$，$0\leqslant j\leqslant r$ 成立，又 u 满足方程 (2.5) 及初始条件 (2.6)。

4) 若 $\varphi_0\in H^r(\Omega_0),\varphi_1\in H^{r-1}(\Omega_0)$，则可以先作 $H^{r+1}(\Omega_0)$ 与 $H^r(\Omega_0)$ 中的序列 $\{\varphi_0^k\}$，$\{\varphi_1^k\}$，由前面的讨论知，对每组 φ_0^k，φ_1^k，方程 (2.5) 的 Cauchy 问题有解 u_k，且关于 $u_k-u_{k'}$ 成立估计式

$$\|\partial_t^j(u_k(t)-u_{k'}(t))\|$$

$$\leqslant C(\|\varphi_0^k-\varphi_0^{k'}\|_{H^r(\Omega_0)}+\|\varphi_1^k-\varphi_1^{k'}\|_{H^{r-1}(\Omega_0)}),$$

由此又可得知 $\{\partial_t^j u_k\}$ 收敛。记 u_k 的极限为 u，则 u 为 Cauchy 问题 (2.5)、(2.6) 的解，且 $\partial_t^j u(t)\in H^{r-j}(\Omega_t)$。

证毕

注 4.2.4 从上述证明过程可见，对方程系数 a_{ij},b_i,c 的光滑性要求可减弱，仅要求它们为 C^{r+1} 类函数即可。

注 4.2.5 由定理 4.2.1 知，解 u 属于 $H^r(Q)$，又当 $r>$

$\left[\frac{n+1}{2}\right]+2$ 时，由嵌入定理可知，u 为古典解。

§ 3 用Galekin方法解初边值问题

本节中我们讨论方程 (1.1) 满足定解条件 (1.2)、(1.3) 的解的存在性。当 (1.1) 的系数不依赖于 t 时，我们已在上一章用算子半群方法讨论了这一问题。现在我们将介绍另一种方法——Galekin 方法并用它来证明解的存在性，且当方程的系数不依赖于 t 时，条件和结论均与上一章的定理 3.4.1 有些不同。

定理 4.3.1 设 $\varphi_0\in H_0^1(\Omega)$，$\varphi_1\in L^2(\Omega)$，$f\in L^1([0,T],L^2(\Omega))$，则存在唯一的函数 $u\in L^\infty([0,T],H_0^1(\Omega))$，使得

$$u_t\in L^\infty([0,T],L^2(\Omega)),$$

并满足 (1.1) 与 (1.2)。

证明 我们先将Galekin方法的思想简述如下：在 $H_0^1(\Omega)$ 中寻求一递增的有限维线性子空间序列 $\{E_\nu\}$，使 $H_0^1(\Omega)=\overline{\bigcup E_\nu}$。由于 $H_0^1(\Omega)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中稠密，故 $\bigcup E_\nu$ 按 $L^2(\Omega)$ 的范数作闭包即得 $L^2(\Omega)$。利用 $H_0^1(\Omega)$ 与 $L^2(\Omega)$ 在 E_ν 上的投影，我们可以把原来的偏微分方程定解问题化为一个常微分方程组的初值问题，在得到常微分方程组的解以后，经组合可得到原问题的近似解，再证明 $\nu\to\infty$ 时这个近似解收敛于所要求的解。

先在 $H_0^1(\Omega)$ 中选取一个基 $\{w_1,\cdots,w_j,\cdots\}$，使它在 $L^2(\Omega)$ 中形成一个完备的标准正交系。这样的序列是存在的，例如我们可以通过解 Laplace 算子取 Dirichlet 条件的特征函数系得到（参见第二章 § 6）。记 E_ν 是 $w_1,\cdots,w_\nu$ 所张成的线性子空间。于是由 $\{w_\nu\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中的稠密性，我们可以选择系数 $\varphi_{0\nu}^k$，使

$$\varphi_{0\nu}=\sum_{k=1}^{\nu}\varphi_{0\nu}^{k}w_k \tag{3.1}$$

在 $H_0^1(\Omega)$ 中收敛于 φ_0，然后定义 $u_\nu^k(t)(k=1,\cdots,\nu)$ 为常微分方程组初值问题

$$(u_\nu^k)''_{tt}+a(t;\sum_{j=1}^{\nu}u_\nu^j(t)w_j,w_k)=(f,w_k), \tag{3.2}$$

$$u_\nu^k(0)=\varphi_{0\nu}^k, \tag{3.3}$$

$$(u_\nu^k)'_t(0)=(\varphi_1,w_k), \tag{3.4}$$

的解。这里，(3.2) 中的 a 为二次形式，当 $v_1,v_2\in H_0^1$ 时，

$$a(t;v_1,v_2)=\int_\Omega\Big(\sum a_{ij}(x,t)\frac{\partial v_1}{\partial x_i}\frac{\partial v_2}{\partial x_j}$$

$$-\sum b_i(x,t)\frac{\partial v_1}{\partial x_i}v_2-c(x,t)v_1v_2\Big)dx$$

$$=-\Big(L\Big(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\Big)v_1,v_2\Big),$$

其中，

$$L\Big(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\Big)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}+c(x,t)。$$

这里$\Big(L\Big(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\Big)v_1,v_2\Big)$应理解为 H^{-1} 的元素对 H_0^1 函数之作用。由此，

$$a\Big(t;\sum_{j=1}^{\nu}u_\nu^j(t)w_j,w_k\Big)=\sum_{j=1}^{\nu}a(t;w_j,w_k)u_\nu^j(t)。 \tag{3.5}$$

在 $w_1,\cdots,w_\nu$ 已确定的情况下，(3.2) 就是 $u_\nu^k(t)$ $(k=1,\cdots,\nu)$ 的二阶常微分方程组，故当 $f\in L^1([0,T],L^2(\Omega))$ 时它有解，且解 $u_\nu^k(t)$ 为 t 的 C^1 函数。作

$$u_\nu(t)=\sum_{k=1}^{\nu}u_\nu^k(t)w_k, \tag{3.6}$$

则 $$u_\nu(t)\in C^1([0,T],H_0^1(\Omega)),$$

且由 (3.2) 知

$$u''_\nu(t)\in L'([0,T],H'_0(\Omega)),$$

利用 $\{w_\nu\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的标准正交系的性质，可以将 (3.2) 改写成

$$(u''_\nu,w_k)-\left(L\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right)u_\nu,w_k\right)=(f,w_k),\ 1\leqslant k\leqslant\nu。\tag{3.7}$$

故 (3.7) 式可以视为方程 (1.1) 在 E_ν 上的投影。今对 (3.7) 中第 k 个方程乘以 $(u_\nu^k)'$，关于 k 相加，即得

$$(u''_\nu,u'_\nu)-\left(L\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right)u_\nu,u'_\nu\right)=(f,u'_\nu)。\tag{3.8}$$

从而我们可利用与 § 1 中同样的方法来证得能量不等式

$$\begin{aligned}&\|u_\nu(t)\|^2_{H^1(\Omega)}+\|u'_\nu(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\\ \leqslant&C\left(\|u_\nu(0)\|^2_{H^1(\Omega)}+\|u'_\nu(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\right.\\ &\left.+\int_0^t\|f(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt\right)。\end{aligned}\tag{3.9}$$

且据 u_ν 初值的选取方法知 (3.9) 式右端被

$$C\left(\|\varphi_0\|^2_{H^1(\Omega)}+\|\varphi_1\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^t\|f(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt\right)$$

所控制。

将 (3.9) 式两边关于 t 从 0 到 T 积分，可知 u_ν 在空间

$$L^2([0,T],H_0^1(\Omega))$$

中形成一有界序列，$(u_\nu)_t$ 在空间 $L^2([0,T],L^2(\Omega))$ 中也形成一有界序列。故可从中取出一个子序列，不妨仍记为 u_ν，使 u_ν 在 $L^2([0,T],H_0^1(\Omega))$ 中弱收敛于 u，而 $(u_\nu)_t$ 在 $L^2([0,T],L^2(\Omega))$ 中弱收敛于 u_t。

现在证明 u 满足方程(1.1)与边界条件(1.2)，利用(3.7)及 u_ν 的弱收敛性质可知，在 $L^2[0, T]$ 中 $(u''_\nu, w_k)_{L^2(\Omega)}$ 弱收敛于

$$\left(L\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right)u+f,w_k\right)_{L^2(\Omega)}。$$

但是，由于 $(u_\nu,w_k)_{L^2(\Omega)}$ 弱收敛于 $(u,w_k)_{L^2(\Omega)}$，故按分布导数与极限的意义有

$$(u''_\nu,w_k)_{L^2(\Omega)}=\frac{d^2}{dt^2}(u_\nu,w_k)$$

$$\longrightarrow\frac{d^2}{dt^2}(u,w_k)_{L^2(\Omega)}=(u'',w_k)_{L^2(\Omega)}。$$

利用 $\{w_\nu\}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中的完备性，对任一 $C_c^\infty((0,T),L^2(\Omega))$ 函数 h，成立

$$(\partial_t^2u,h)=(L(x,t,\partial_x)u+f,h), \tag{3.10}$$

所以 u 满足方程(1.1)。

为说明 u 的光滑性，注意到(3.9)右端可以被一个与 ν 无关的常数所控制，所以有

$$\|u_\nu(t)\|_{H_0^1(\Omega)}\leqslant C,\quad \|u'_\nu(t)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C \tag{3.11}$$

对于一切 ν 成立。因此

$$\left(\int\|u_\nu(t)\|^p_{H_0^1(\Omega)}dt\right)^{\frac{1}{p}},\quad \left(\int\|u'_\nu(t)\|^p_{L^2(\Omega)}dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

对任意 ν 与 p 都不超过常数 C，从而从 $\{u_\nu\}$ 中又可选取一子序列，不妨仍用 $\{u_\nu\}$ 记之，使 u_ν 在 $L^p([0,T],H_0^1(\Omega))$ 中弱收敛，$(u_\nu)_t$ 在 $L^p([0, T], L^2(\Omega))$ 中弱收敛。于是，由极限的唯一性知，前面所得到的解满足

$$u\in L^p([0,T],H_0^1(\Omega)),\quad u_t\in L^p([0,T],L^2(\Omega))。$$

由于 L^p 空间中弱收敛极限元素的范数不超过序列中元素范数的上极限，于是有

$$\left(\int \|u(t)\|^p_{H^1_0(\Omega)}dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C, \quad \left(\int \|u'(t)\|^p_{L^2(\Omega)}dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C \tag{3.12}$$

对任意 p 成立。再利用下面的引理 4.3.1 就可得

$$u \in L^\infty([0,T], H^1_0(\Omega)), \quad u_t \in L^\infty([0,T], L^2(\Omega)),$$

且它们的相应范数也被常数 C 所控制。

引理 4.3.1 若对一切满足 $1 \leqslant p < \infty$ 的指数 p，$u \in L^p(\Omega)$，又 $\|u\|_{L^p} \leqslant C$，则 $u \in L^\infty(\Omega)$，且 $p \to \infty$ 时，$\|u\|_{L^p} \to \|u\|_{L^\infty}$。

这一引理的证明留在后面，这里我们继续定理4.3.1的证明，由于 $u_t \in L^\infty([0,T], L^2(\Omega))$，所以至多改变 u 在 $[0,T]$ 上一个零测度集上之值，可使 $u \in C([0,T], L^2(\Omega))$。又利用方程 (1.1) 以及 f 所满足的性质可知 $u_{tt} \in L^1([0,T], H^{-1}(\Omega))$，所以在同样意义下，$u_t \in C([0,T], H^{-1}(\Omega))$，于是 $u(0)$，$u_t(0)$ 都有确定的意义。今来验证 $u(0) = \varphi_0(x)$，$u_t(0) = \varphi_1(x)$。

记 $v_\nu = u_\nu - u$，对于任意 $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$，

$$(v_\nu(0), \varphi) = (v_\nu(t), \varphi) - \int_0^t (v'_\nu(\tau), \varphi)d\tau。$$

在 $[0,T]$ 上积分，得

$$T(v_\nu(0), \varphi) = \int_0^T (v_\nu(t), \varphi)dt - \int_0^T\int_0^t (v'_\nu(\tau), \varphi)d\tau dt。 \tag{3.12}$$

由 v_ν 在 $L^2([0,T], H'_0(\Omega))$ 中弱收敛于零，因而 (3.12) 右端第一项趋于零。又由 v'_ν 在 $L^2([0,T], L^2(\Omega))$ 中弱收敛于零知，对一切 t

$$\int_0^t (v'_\nu(\tau), \varphi)d\tau \to 0。$$

另外，我们有估计式

$$\left|\int_0^t (v_\nu'(\tau),\varphi)d\tau\right| \leqslant \int_0^t \|v_\nu'(\tau)\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}d\tau$$

$$\leqslant C\int_0^t \|v_\nu'(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau,$$

由 (3.9) 式知，它被一个与 ν 无关的常数控制，于是由控制收敛定理知，(3.12) 右端第二项也趋于零，故将

$$(v_\nu(0),\varphi)\to 0,\ \ \forall\varphi\in L^2(\Omega)。\tag{3.13}$$

这说明 $u_\nu(0)$ 弱收敛于 $u(0)$（或按广义函数意义收敛于 $u(0)$）。但由 (3.3) 知 $u_\nu(0)\to\varphi_0$，故得 $u(0)=\varphi_0$。

又对于前面选定的 $w_1,w_2,\cdots$，成立

$$(v_\nu'(0),w_j)=(v_\nu'(t),w_j)-\int_0^t(v_\nu''(\tau),w_j)d\tau,$$

关于 t 在 $[0,T]$ 上积分，得

$$T(v_\nu'(0),w_j)=\int_0^T(v_\nu'(t),w_j)dt-\int_0^T\int_0^t(v_\nu''(t),w_j)d\tau dt。\tag{3.14}$$

由 (1.1) 知，对任意 w_j 成立

$$(u,w_j)-\left(L\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right)u,w_j\right)=(f,w_j),$$

而由 (3.7) 知，当 $j\leqslant\nu$ 时，u_ν 也满足此方程，从而在 $j\leqslant\nu$ 时

$$(v_\nu''(\tau),w_j)=(Lv_\nu,w_j),$$

于是

$$T(v_\nu'(0),w_j)=\int_0^T(v_\nu'(t),w_j)dt-\int_0^T\int_0^t(Lv_\nu,w_j)d\tau dt。\tag{3.15}$$

从而与前面相仿，可以证得对任一 w_j，在 $\nu\to\infty$ 时（因为 ν 趋于无穷，故 ν 最终必大于 j），

$$(v_\nu'(0),w_j)\to 0。\tag{3.16}$$

由 $\{w_\nu\}$ 的完备性以及 (3.4) 式知 $u_\nu'(0)\to\varphi_1$，故得 $u'(0)=\varphi_1$。

最后剩下的是唯一性的证明，在§1中我们证明了$H^2([0,T]\times\Omega)$解的唯一性。但由于这里所得到的解u的光滑性要差一些，故不能直接应用能量不等式(1.6)，而需要另作些处理。

设$u\in L^\infty([0,T],H_0^1(\Omega))$，$u_t\in L^\infty([0,T],L^2(\Omega))$，$u$满足齐次方程

$$u_{tt}-L\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0, \tag{3.17}$$

以及初始条件$u(0)=u_t(0)=0$。令

$$U(t)=\int_0^t u(\tau)d\tau,$$

将方程(3.17)写成

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-L\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right)U\right]+L_t\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right)U=0, \tag{3.18}$$

其中

$$L_t\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right)U=\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ijt}(x,t)\frac{\partial U}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^n b_{it}(x,t)\frac{\partial U}{\partial x_i}+c_t(x,t)U。$$

将(3.18)积分，利用初始条件可得

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-L\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right)U=-\int_0^t L_\tau\left(x,\tau,\frac{\partial}{\partial x}\right)U(\cdot,\tau)d\tau, \tag{3.19}$$

因为

$$U_t\in L^\infty([0,T],H_0^1(\Omega)),\ U_{tt}\in L^\infty([0,T],L^2(\Omega)),$$
$$-L_t\left(x,\tau,\frac{\partial}{\partial x}\right)U\in L^\infty([0,T],H^{-1}(\Omega)),$$

所以可对(3.19)两边乘以$\frac{\partial U}{\partial t}$并积分（或理解为泛函的作用）。

再利用§1中证明能量不等式时所用的方法，可以得到类似于(1.7)的表达式：

$$\int_{\Omega}(U_t^2+\alpha\Sigma U_{x_i}^2)dx\Big|_{t=t}$$
$$\leqslant C_1\int_{\Omega}(U_t^2+\Sigma U_{x_i}^2)dx\Big|_{t=0}$$
$$+C_1\int_0^t\int_{\Omega}(U_t^2+\Sigma U_{x_i}^2+U^2)dxdt$$
$$+\left|\int_0^t\int_{\Omega}U_t(x,t_1)\left(-\int_0^{t_1}L_\tau\left(x,\tau,\frac{\partial}{\partial x}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.\times U(x,\tau)d\tau\right)dxdt_1\right|。\tag{3.20}$$

在上式右边最后一项中，将 $\int_0^t\int_0^{t_1}*d\tau\,dt_1$ 改写成 $\int_0^t\int_\tau^t*dt_1d\tau$，这项即化成

$$\int_0^t\int_{\Omega}(U(x,t)-U(x,\tau))L_\tau\left(x,\tau,\frac{\partial}{\partial x}\right)U(x,\tau)dxd\tau。$$

易知，此项的绝对值小于

$$C\int_0^t\int_{\Omega}(U^2(x,t)+\Sigma U_{x_i}^2(x,t)+U^2(x,\tau)$$
$$+\Sigma U_{x_i}^2(x,\tau))dxd\tau,$$

代入(3.20)并利用初始条件可得

$$(1-Ct)\tilde{E}(t)\leqslant C\int_0^t\tilde{E}(\tau)d\tau,\tag{3.21}$$

式中

$$\tilde{E}(t)=\int_{\Omega}(U^2+U_t^2+\Sigma U_{x_i}^2)dx$$

表示函数U在时刻 t 的能量。由(3.21)式以及 $\tilde{E}(0)=0$ 易得 $t<\frac{1}{C}$ 时 $\tilde{E}(t)\equiv0$。于是$U(t)\equiv0$，进而知$u(t)\equiv0$。反复利用这

一方法，可得到对任意的 $t\in[0,T]$，$u(t)=0$。这就是唯一性。

证毕

现在我们补充引理 4.3.1 的证明如下：

证明 用反证法。设 Ω_1 为 Ω 的子集，测度 $\mathrm{mes}\,\Omega_1=\delta>0$，而 $|u|$ 在 $\mathrm{mes}\Omega_1$ 上大于 $C+\varepsilon$，则

$$\|u\|_{L^p}\geqslant\left(\int_{\Omega_1}|u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant(C+\varepsilon)\delta^{\frac{1}{p}} \tag{3.22}$$

当 p 充分大时，此式 $>C$，从而导致矛盾。因此 $u\in L^\infty$，且

$$\|u\|_{L^\infty}\leqslant C。$$

又若记 $M=\|u\|_{L^\infty}$，对任一 $\varepsilon>0$，$\mathrm{mes}\{x;|u(x)|>M-\varepsilon\}$ 必为正测度，将此测度记为 δ_1，则

$$\|u\|_{L^p}\geqslant\Big(\int_{|u|>M-\varepsilon}|u|^p dx)^{\frac{1}{p}}\geqslant(M-\varepsilon)\cdot\delta_1^{\frac{1}{p}},$$

在 p 充分大时必有 $\|u\|_{L^p}>M-2\varepsilon$。这就说明 $\|u\|_{L^p}\to\|u\|_{L^\infty}$。

证毕

对于本节中所讨论的问题 (1.1)—(1.3)，当初始条件与方程右端项 f 有更高的正则性时，解 u 也可以有更高的正则性，例如我们有如下定理：

定理 4.3.2 设

$$\varphi_0\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),\quad \varphi_1\in H_0^1(\Omega),$$

$$f\in L^2([0,T],H_0^1(\Omega)),\quad f_t\in L^2([0,T],L^2(\Omega)),$$

则问题 (1.1)—(1.3) 的解

$$u\in L^\infty([0,T],H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)),$$

且

$$u_t\in L^\infty([0,T],H_0^1(\Omega)),\quad u_{tt}\in L^\infty([0,T],L^2(\Omega))。$$

本定理的证明从略。

§ 4 对称双曲组

这一节中我们再介绍一类多个自变量的一阶线性双曲型偏微分方程组，即对称双曲组。许多数学物理中的偏微分方程（组）都可以化为一阶对称双曲组。而前面所介绍的能量方法在讨论对称双曲组时正是一个很有效的工具。

考察如下的一阶线性偏微分方程组

$$L\vec{u}=\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}A_i\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}+B\vec{u}=\vec{f}, \qquad (4.1)$$

其中未知函数 $\vec{u}$ 及右端 $\vec{f}$ 是具有 N 个分量的列向量函数，A_i，C 是自变量的 $N\times N$ 函数矩阵，以下设它们在所考察的区域中是 C^∞ 光滑的，又设 A_i 都是对称阵。此时称 (4.1) 为**对称双曲组**。更一般形式的对称双曲组是指经过一些简单的变换后可化成 (4.1) 形式的一阶偏微分方程组。

我们先给出一些对称双曲组的例子。

例 1 真空中的 Maxwell 方程，在适当选取量纲后，形式为

$$\begin{cases}\vec{E}_t-\text{rot }\vec{H}=0,\\ \vec{H}_t+\text{rot }\vec{E}=0。\end{cases} \qquad (4.2)$$

这里 $\vec{E}=(u_1,u_2,u_3)$ 为电场强度，$\vec{H}=(u_4,u_5,u_6)$ 为磁场强度。(4.2) 又可写成

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial t}+\dfrac{\partial u_5}{\partial z}-\dfrac{\partial u_6}{\partial y}=0,\dfrac{\partial u_4}{\partial t}-\dfrac{\partial u_2}{\partial z}+\dfrac{\partial u_3}{\partial y}=0,\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}+\dfrac{\partial u_6}{\partial x}-\dfrac{\partial u_4}{\partial z}=0,\dfrac{\partial u_5}{\partial t}-\dfrac{\partial u_3}{\partial x}+\dfrac{\partial u_1}{\partial z}=0,\\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t}+\dfrac{\partial u_4}{\partial y}-\dfrac{\partial u_5}{\partial x}=0,\dfrac{\partial u_6}{\partial t}-\dfrac{\partial u_1}{\partial y}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x}=0。\end{cases} \qquad (4.3)$$

记 (t,x,y,z) 为 (t,x_1,x_2,x_3)，(4.3) 就可以写成 (4.1) 的形式，

易见此时相应的 A_i 均为对称阵。

例 2 一般的二阶线性双曲型方程具有形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+b_0\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f, \tag{4.4}$$

其中矩阵 (a_{ij}) 正定。今若引入新变量 $\vec{v}=(v,v_0,v_1,\cdots,v_n)$，其中 $v=u$，$v_0=\dfrac{\partial u}{\partial t}$，$v_i=\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$，则可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}-v_0=0,\\ \dfrac{\partial v_0}{\partial t}+2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial v_0}{\partial x_i}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\\ \qquad +b_0v_0+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}b_iv_i+cv=f,\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(\frac{\partial v_j}{\partial t}-\frac{\partial v_0}{\partial x_j}\right)=0,\quad (i=1,\cdots,n)。\end{cases} \tag{4.5}$$

它可写成矩阵的形式：

$$A_0\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}A_i\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_i}+B\vec{v}=\vec{f}, \tag{4.6}$$

其中

$$A_0=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\ \vdots&0&a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},$$

$$A_i=\begin{pmatrix}0&\cdots&\cdots&\cdots\ \cdots&0\\0&2a_i&-a_{1i}&\cdots&-a_{ni}\\ \vdots&-a_{1i}&&&\\ \vdots&\vdots&&0&\\0&-a_{ni}&&&\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ c & b_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ & & 0 & & \end{pmatrix},$$

$$\vec{f}=\begin{pmatrix} 0 \\ f \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}。$$

由于 A_0 为对称正定阵，故可以找到对称阵 T，使 $T^2=A_0$。再作变换 $\vec{w}=T^{-1}\vec{v}$，就可把（4.6）化到以 $\vec{w}$ 为未知函数的方程组（4.1）。

类似于定义 4.1.1，我们称空间 $(t,x_1,\cdots,x_n)$ 中的曲面 S 为**弱类空向**的，若 S 的法向 $\nu(\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_n)$ 使矩阵 $\nu_0 I+\sum\limits_{i=1}^{n}\nu_i A_i$ 为半正定的，又称 S 为**特征曲面**，如果 $\det|\nu_0 I+\sum\limits_{i=1}^{n}\nu_i A_i|=0$。

对于对称双曲组，也可以讨论其 Cauchy 问题与初边值问题，关于 Cauchy 问题，其讨论方法与结论和二阶双曲型方程十分相似。例如我们可以用能量不等式与解析逼近法证明：若在 $t=0$ 平面的区域 Ω 上给定初始资料，则（4.1）的 Cauchy 问题夹于 Ω 与某特征曲面之间的区域中的解就可唯一地确定。我们建议读者自行推导这一结论。以下我们将讨论（4.1）的初边值问题，并着重指出它与二阶双曲型方程的一些不同之处。

设 Ω 为空间 $(x_1,\cdots,x_n)$ 中的一个有界区域，边界光滑，今要讨论在 $Q=(0,T)\times\Omega$ 上方程组（4.1）的初边值问题，初始条件为

$$\vec{u}|_{t=0}=\vec{\varphi}(x), \tag{4.7}$$

边界条件为

$$M\vec{u}|_{(0,T)\times\partial\Omega}=0, \tag{4.8}$$

在此，我们不失一般性地将边界条件给成齐次的，(4.8) 式中M是定义在边界 $(0,T)\times\partial\Omega$ 上的一个矩阵函数。由于方程组 (4.1) 是一阶的，故边界条件 (4.8) 取零阶的形式是合适的。问题在于M应当取成怎样的矩阵。

易见，当M为满秩阵时，条件 (4.8) 等价于 $\vec{u}=0$。然而从例 2 可见，这样的条件可能太多了，事实上，对方程组 (4.6) 若要求 $\vec{v}$ 的一切分量在边界上为零，即相当于要求方程 (4.4) 的未知函数 u 及其一切导数在边界上均为零。这样的边界条件比通常的 Dirichlet 条件或 Neumann 条件的限制更严，从而对初边值问题解的存在唯一性之讨论并不合适。

由此可知，在 $(0,T)\times\partial\Omega$ 上矩阵M一般不满秩，但我们通常要求它保持常秩数。关于M的更确切的条件将从以下关于存在唯一性的讨论得出。

在边界 $(0,T)\times\partial\Omega$ 上，记 $(\nu_1,\cdots,\nu_n)$ 为 Ω 的外法向，并引入法矩阵 $\beta=\sum_{i=1}^{n}\nu_iA_i$，它在今后的讨论中起重要的作用。

定理 4.4.1 设 u 为对称双曲组 (4.1) 满足初边值条件 (4.7)、(4.8) 的经典解，边界条件 $M\vec{u}=0$ 为二次型 $\vec{u}\cdot\beta\vec{u}$ 的非负子空间（即 $M\vec{u}=0$ 蕴含 $\vec{u}\cdot\beta\vec{u}\geqslant0$），则成立能量不等式

$$\|\vec{u}(t)\|^2\leqslant C(\|\vec{\varphi}\|^2+\int_0^t\|\vec{f}(\cdot,t)\|^2dt)。 \tag{4.9}$$

证明 若在方程组 (4.1) 中作变换 $\vec{u}=e^{\mu t}\vec{v}$，则得

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}A_i\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_i}+B\vec{v}+\mu I\vec{v}=e^{-\mu t}\vec{f}. \tag{4.10}$$

在μ充分大时，$\mu I+B-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_i}{\partial x_i}$为正定阵。在 (4.10) 两边乘

以 $2\vec{v}$，并在 $(0,t)\times\Omega$ 上进行积分，则有

$$\int_{(0,t)\times\Omega}\frac{\partial|\vec{v}|^2}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\vec{v}\cdot A_i\vec{v})$$

$$+2\vec{v}\cdot\left(\mu I+B-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_i}{\partial x_i}\right)\vec{v}dxdt$$

$$=\int_{(0,t)\times\Omega}2\vec{v}\cdot e^{-\mu t}\vec{f}dxdt,$$

经过分部积分，并利用 $\mu I+B-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_i}{\partial x_i}\geqslant 0$，可得

$$\int_\Omega|\vec{v}(t)|^2dx-\int_\Omega|\vec{v}(0)|^2dx+\int_{(0,t)\times\partial\Omega}\vec{v}\cdot\beta\vec{v}dS$$

$$\leqslant 2\int_{(0,t)\times\Omega}\vec{v}\cdot e^{-\mu t}\vec{f}dxdt$$

因为 $M\vec{u}=0$ 等价于 $M\vec{v}=0$，它蕴含着 $\vec{v}\cdot\beta\vec{v}\geqslant 0$。故可得

$$\int_\Omega|\vec{v}(t)|^2dx\leqslant\int_\Omega|\vec{v}(0)|^2dx+\int_0^t\int_\Omega|\vec{v}(t)|^2dxdt$$

$$+C\int_0^t\|\vec{f}(\cdot,t)\|^2dt。$$

利用 Gronwall 不等式，即可得

$$\|\vec{v}(t)\|^2\leqslant C(\|\vec{v}(0)\|^2+\int_0^t\|\vec{f}(\cdot,t)\|^2dt),\qquad (4.11)$$

再将 $\vec{v}$ 用 $e^{-\mu t}\vec{u}$ 代入，即得 (4.9)。

证毕

容易看出，由能量不等式 (4.9) 可立即推出方程组 (4.1) 的初边值问题经典解的唯一性。

但是，仅有边界条件使 $\vec{u}\cdot\beta\vec{u}$ 非负这一条，一般来说并不能推出定解问题解的存在性，因为假若一组使 $\vec{u}\cdot\beta\vec{u}$ 非负的边界条件就能得出定解问题解的存在性，那末直接取 $\vec{u}=0$，它也必使 $\vec{u}\cdot\beta\vec{u}$

非负，而前面已从与二阶双曲型方程的对比可知，这样的边界条件太多了。于是我们希望边界条件在保证解的唯一性的前提下限制最少，亦即希望 $M\vec{u}=0$ 是最大的使 $\vec{u}\cdot\beta\vec{u}\geqslant 0$ 成立的子空间。这样的分析导致下面的定义。

定义 4.4.1 若 R^N 中的线性子空间 π 使二次型 $\vec{u}\cdot\beta\vec{u}$ 非负，且 π 不能扩张为一个更大的子空间而仍使 $\vec{u}\cdot\beta\vec{u}$ 非负，则称 π 为**最大非负子空间**。

关于最大非负子空间有以下性质：

引理 4.4.1 若 π 为 $\vec{u}\cdot\beta\vec{u}$ 的最大非负子空间，则 π 包含 β 的零空间 $N(\beta)$，且 $(\beta\pi)^{\perp}$ 是二次型 $-\vec{v}\cdot\beta\vec{v}$ 的非负子空间。

证明 首先，若 $\vec{w}\in N(\beta)$，$\vec{u}\in\pi$，则由 $\beta\vec{w}=0$ 知

$$(\vec{u}+c\vec{w})\cdot\beta(\vec{u}+c\vec{w})=\vec{u}\cdot\beta\vec{u}\geqslant 0。$$

故由 π 与 $\vec{w}$ 所张成的线性子空间也是 $\vec{u}\cdot\beta\vec{u}$ 的非负子空间，从而由 π 的最大非负特性知，$\vec{w}\in\pi$，此即得 $N(\beta)\subset\pi$。

今若 $(\beta\pi)^{\perp}$ 不是 $-\vec{u}\cdot\beta\vec{u}$ 的非负子空间，则有 $\vec{v}\in(\beta\pi)^{\perp}$ 使 $-\vec{v}\cdot\beta\vec{v}<0$，即 $\vec{v}\cdot\beta\vec{v}>0$。这时 $\vec{v}$ 不可能再属于 π，因为若 $\vec{v}\in\pi$，则 $\beta\vec{v}\in\beta\pi$，从而 $\vec{v}\cdot\beta\vec{v}$ 应为零，这是与前面的 $\vec{v}\cdot\beta\vec{v}>0$ 相矛盾的。

将 $\vec{v}$ 与 π 一起张成的线性空间记为 $\vec{v}\oplus\pi$，其中任一元素 $\vec{w}$ 具形式 $\lambda\vec{v}+\vec{u}(u\in\pi)$，则

$$(\lambda\vec{v}+\vec{u})\cdot\beta(\lambda\vec{v}+\vec{u})=\lambda^2\vec{v}\cdot\beta\vec{v}+\vec{u}\cdot\beta\vec{u}\geqslant 0,$$

这又与 π 为 $\vec{u}\cdot\beta\vec{u}$ 的最大非负子空间的性质产生矛盾。

证毕

注 4.4.1 事实上，还可证明 $(\beta\pi)^{\perp}$ 是二次型 $-\vec{u}\cdot\beta\vec{u}$ 的最大非负子空间，此处从略。

若 π 表示子空间 $M\vec{u}=0$，则 $(\beta\pi)^{\perp}$ 称为边界条件 $M\vec{u}=0$ 的共轭边界条件，其含义是：若 $\vec{u},\vec{v}\in C^1(\bar{Q})$，$u$ 满足条件 $M\vec{u}=0$，$\vec{v}$ 满足其共轭边界条件（记为 $M^*\vec{v}=0$），则

$$(L\vec{u},\vec{v})_{L^2(Q)}=(\vec{u},L^*\vec{v})_{L^2(Q)},\qquad(4.12)$$

式中

$$L^*\vec{v}=-\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(A_i\vec{v})+B^T\vec{v}。$$

反之，若 $\vec{v}\in C^1(\bar{Q})$，且对任一满足 $M\vec{u}=0$ 的 $C^1(\bar{Q})$ 函数 u 成立 (4.12)-式，则必有 $M^*\vec{v}=0$。

定理 4.4.2 对于对称双曲组的初边值问题(4.1)、(4.7)、(4.8)，若边界条件 $M\vec{u}=0$ 为二次型 $\vec{u}\cdot\beta\vec{u}$ 的最大非负子空间，则存在下述意义的 L^2 广义解 $\vec{u}$：它在 $(0,T)\times\Omega$ 内按广义函数的意义满足方程，又对任一满足

$$\vec{v}|_{t=T}=0,\quad M^*\vec{v}|_{(0,T)\times\partial\Omega}=0\qquad(4.13)$$

的 $C^1(\bar{Q})$ 函数 $\vec{v}$，成立

$$(\vec{f},\vec{v})_{L^2(Q)}+(\vec{\varphi},\vec{v}(0))_{L^2(\Omega)}=(\vec{u},L^*\vec{v})_{L^2(Q)}。\qquad(4.14)$$

证明 由于算子 L^* 在边界 $(0,T)\times\partial\Omega$ 上作出的法矩阵恰为 $-\beta$，而引理 4.4.1 指出 $M^*\vec{v}=0$ 为 $\vec{v}\cdot(-\beta)\vec{v}$ 的非负子空间，于是我们可以如定理 4.4.1 那样导出关于算子 L^* 的能量不等式：

$$\|\vec{v}(t)\|^2\leqslant C(\|\vec{v}(T)\|^2+\int_t^T\|(L^*\vec{v})(\cdot,t)\|^2dt)。\qquad(4.15)$$

由于 $\vec{v}(T)=0$，故对一切 $0\leqslant t\leqslant T$，

$$\|\vec{v}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant C\|L^*\vec{v}\|^2_{L^2(Q)},\qquad(4.16)$$

且有

$$\|\vec{v}\|^2_{L^2(Q)}\leqslant C\|L^*\vec{v}\|^2_{L^2(Q)}。\qquad(4.17)$$

这样，对于给定理的 $\vec{f},\vec{\varphi}$，我们有

$$|(\vec{f},\vec{v})_{L^2(Q)}|+|(\vec{\varphi},\vec{v}(0)_{L^2(\Omega)}|\leqslant C\|L^*\vec{v}\|^2_{L^2(Q)}。$$

于是，在 $L^2(Q)$ 中作线性集 $\Sigma=\{\vec{w};\ \vec{w}=L^*\vec{v},\ \vec{v}\in C^1(\bar{Q})\}$，则 (4.14) 的左边 $(\vec{f},\vec{v})_{L^2(Q)}+(\vec{\varphi},\vec{v}(0))_{L^2(\Omega)}$ 就可视为定义在 Σ 上的

一个线性连续泛函 $l(\vec{w})$。由 Hahn-Banach 定理，这个线性泛函可以保范扩充到全空间，再由 Riesz 表现定理知，有 $\vec{u}\in L^2(Q)$ 使

$$l(\vec{w})=(\vec{u},\vec{w}), \tag{4.18}$$

再将 $\vec{w}=L^*\vec{v}$ 代入上式，即得 (4.14)。

证毕

定理 4.4.2 中所得到的 L^2 广义解也称为**弱解**。显然，经典意义的解必为弱解。但什么条件下弱解可以有较高的正则性，还需要较细致的分析。关于弱解的唯一性问题，也还得进一步讨论。对这些问题有兴趣的读者，可参见 [2] 以及该书中所列的其他文献。

附录 A　Fredholm-Riesz-Schauder 理论

我们将证明关于全连续算子的几个重要定理。这些定理通常被称为Fredholm-Riesz-Schauder 定理，又称为抽象积分方程的定理。本附录所叙述的结果对 Banach 空间而言也是对的，但就我们的应用而言，Hilbert 空间是足够的，故仍限于在 Hilbert 空间中叙述这些定理。记H是复数域（或实数域）上的 Hilbert 空间，$(\ ,\ )$和$\|\ \|$分别表示H中的内积和范数。T是H到H的线性全连续算子，即T是一线性算子，且把H中的有界集映为紧集。记$Q=I-T$和$N=\{x\in H \mid Qu=0\}$。由T的全连续性不难推得，N是有限维的线性子空间。又记$M=N^{\perp}$，显然M是闭子空间。

引理 A.1　存在一常数$C_1>0$，使得

$$C_1^{-1}\|u\|\leqslant\|Qu\|\leqslant C_1\|u\|,\ \forall u\in M。$$

证明　第二个不等式是T的有界性的直接结果，故我们仅需证明第一个不等式。设命题不真，则存在$u_n\in M$，满足$\|u_n\|=1$，使得$\|Qu_n\|\to 0$。因$\{u_n\}$为有界点列，故存在子序列（不妨仍记为$\{u_n\}$）使$Tu_n\longrightarrow v\in H$。从而$u_n=Tu_n+Qu_n\longrightarrow v\in M$，且$\|v\|=1$。另一方面$Qv=\lim Qu_n=0$。由此推出$v\in N=M^{\perp}$。综上所述$v=0$，但这和$\|v\|=1$相矛盾。

证毕

因为T是线性连续算子，则T^*也是从H到H的线性连续算子，且$T^{**}=T$。事实上，还有下列结果：

引理 A.2　T^*也是全连续算子。

证明　设$\{u_i\}$为H中的有界序列，则$\{T^*u_i\}$也是H中有界序列。因T为全连续算子，故存在一子列，不妨仍记为$\{T^*u_i\}$，使

得$\{TT^*u_i\}$为H中的Cauchy点列。因此，我们有

$$\|T^*u_i - T^*u_j\|^2 = (TT^*(u_i - u_j),\ u_i - u_j)$$
$$\leqslant (\|u_i\| + \|u_j\|)\|TT^*u_i - TT^*u_j\|。$$

因$\{TT^*u_i\}$是H中的Cauchy点列，则$\{T^*u_i\}$也是H中的Cauchy点列。因此T^*是全连续算子。

定理 A.1 方程 $v - T^*v = f$ 有解的充要条件是 $f \in M$。

证明 必要性的证明：设方程 $v - T^*v = f$ 有解，那么，对任一$w \in N$，有

$$(f, w) = (v - T^*v, w) = (v, (I - T)w) = 0。$$

这就证得 $f \in N^\perp = M$。

充分性的证明：记$\Sigma = \{u \in H \mid u = (I - T)w,\ w \in M\}$。显然，$\Sigma$是$H$的线性子空间。在$\Sigma$上定义一线性泛函

$$l(u) = (w, f),\ 当\ u = (I - T)w,\ w \in M。$$

由引理 A.1 可知，$l(u)$是Σ上的有界线性泛函。由 Hahn-Banach 定理可得，$l(u)$可延拓成整个H上的有界线性泛函。再由 Riesz 表现定理不难找到 $v \in H$，使

$$(w, f) = ((I - T)w, v),\quad \forall w \in M$$

即

$$(w, f - (v - T^*v)) = 0,\quad \forall w \in M。$$

我们知道，对任一 $w \in H$ 有直交分解 $w = w' + w''$，其中 $w' \in M$，$w'' \in N$。那么对任一$w \in H$有

$$(w, f - (v - T^*v)) = (w', f - (v - T^*v)) + (w'', f - (v - T^*v))$$
$$= 0.$$

在导出最后一式时，我们已经应用了 $f \in M$ 这一条件。因此，v 就是我们所期望的解。

证毕

记N^*为$Q^* = I - T^*$的零空间，$M^* = (N^*)^\perp$。我们有

系 A.1 $u-Tu=f$ 有解的充要条件是 $f\in M^*$。

证明 在引理A.3中，用 T^* 和 M^* 分别代替 T 和 M，注意到 $T^{**}=T$，就可立即得出系 **A.1**。

证毕

引理 A.3 $T_n=I-Q^n$ 是全连续算子，Q^n 的零空间 N_n 也是有限维的，且 $N_n\subset N_{n+1}$。

证明 因为

$$T_n=I-(I-T)^n=C_n^1T-C_n^2T^2+\cdots+(-1)^{n-1}T^n,$$

故 T_n 是全连续算子。从而 $Q^n=I-T_n$ 的零空间是有限维的。又若 $u\in N_n$，那么 $Q^{n+1}u=QQ^nu=0$，故 $u\in N_{n+1}$。

证毕

引理 A.4 存在一正整数 k，使得对任何 $n>k$，$N_n=N_k$，而对任何 $n<k$，$N_n\neq N_{k+1}$。

证明 首先，我们说明，若 $N_n=N_{n+1}$，则 $N_{n+2}=N_n$。事实上，对任一 $u\in N_{n+2}$，即 $0=Q^{n+2}u=Q^{n+1}Qu$，那么 $Qu\in N_{n+1}$。因 $N_{n+1}=N_n$，所以 $Q^nQu=Q^{n+1}u=0$，从而推得 $u\in N_{n+1}=N_n$。

现在我们用反证法证明引理 **A.4**。若满足引理**A.4**的结论的 k 不存在，那么，存在一序列$\{u_n\}$，其中$u_n\in N_{n+1}$，$u_n\in N_n^\perp$和$\|u_n\|=1$。因 T 是全连续算子，我们可设$\{Tu_n\}$是Cauchy序列（必要时，取一子序列）。另一方面，当 $n>m$ 时，

$$Q^n(Qu_n+Tu_m)=Q^{n+1}u_n+TQ^nu_m=0。$$

由此可得 $Qu_n+Tu_m\in N_n$。再则，从 u_n 的选取可知

$$T(u_n-u_m)=u_n-(Qu_n+Tu_m)。$$

上式右端是一直交分解式，故

$$\|Tu_n-Tu_m\|^2=\|u_n\|^2+\|Qu_n+Tu_m\|^2\geqslant 1.$$

这和$\{Tu_n\}$是Cauchy点列相矛盾。

证毕

记R和R^*分别是Q和Q^*的值域。

引理 A.5 若 $R=H$，则 $N=\{0\}$。

证明 若 $R=H$，且存在 $u_0\neq 0$，使得 $Qu_0=0$，由于Q的值域为全空间，故可构造一序列$\{u_j\}$，满足

$$Qu_j=u_{j-1},\ (j=1,\cdots,)。$$

两边分别作用Q^j和Q^{j-1}，可得

$$Q^{j+1}u_j=Q^j u_{j-1}=\cdots=Qu_0=0$$

和

$$Q^j u_j=Q^{j-1}u_{j-1}=\cdots=Qu_1=u_0\neq 0。$$

这意味着，对所有的$j=1,\cdots$，$u_j\in N_{j+1}$，但$u_j\notin N_j$。这和引理 A.4 相矛盾。故$N=\{0\}$。

证毕

定理 A.2 $R=H$ 的充要条件是 $N=\{0\}$。

证明 当 $N=\{0\}$时，由定理 **A.1** 知，$Q^*v=v-T^*v=f$，对任何 $f\in N^\perp=H$ 有解，故Q^*的值域 $R^*=H$。根据引理 **A.5**，我们就有 $N^*=\{0\}$。再次使用定理 **A.1** 就立即导出 $R=H$。相反方向的结论是引理 **A.5** 的直接结果。

证毕

定理 A.3 N 和 N^* 有相同的维数。

证明 首先N和N^*均是有限维的。不妨设 $u_1\cdots,u_n$ 和 $v_1,\cdots,v_\nu$ 分别是N和N^*的单位正交基。若 $\nu>n$，我们将导出矛盾。定义一新的全连续算子。

$$Su=Tu-\sum_{j=1}^{n}(u,u_j)v_j。$$

那么，按照

$$Wu=u-Su=Qu+\sum_{j=1}^{n}(u,u_j)v_j$$

所定义的算子W的零空间只有零元素。事实上，因 Qu 和 $v_j(j=$

$1,\cdots,\nu$)正交，若$Wu=0$，就可推出$Qu=0$和$(u,u_j)=0(j=1,\cdots,n)$。前者意味着$u\in N$，后者意味着$u\in N^{\perp}$，从而只有$u=0$。这就证得了W的零空间只有零元素。因为S是全连续算子和一有限秩算子之和，所以S仍是全连续算子。由定理**A.2**知W的值域等于全空间。考虑方程$Wu=v_{n+1}$。此方程必然有解，设其解为u_0，那么

$$\|v_{n+1}\|^2=(Qu,\ v_{n+1})+\sum_{j=1}^{n}(u,u_j)(v_j,v_{n+1})=0.$$

这和v_{n+1}为单位向量相矛盾。这就证得$\nu\leqslant n$。

若$\nu<n$，那么我们定义

$$S^*v=T^*v-\sum_{j=1}^{\nu}(v,v_j)u_j\ .$$

重复前述推理，就可导出相同的矛盾。因此，必有$\nu=n$。

证毕

定理 A.4 存在一复平面C^1上可列离散系集Λ，使得，当$\lambda\in\Lambda$时，方程$u-\lambda Tu=0$只有平凡解。

证明 显然，仅需证明方程$u-\lambda Tu=0$有非零解的λ的集合Λ是离散的。设$\{\lambda_n\}$是Λ中不相同值的序列，对应λ_n的非零解为u_n。用归纳法不难证得$u_1,\cdots,u_n$是线性无关的。记E_n为$\{u_1,\cdots,u_n\}$张成的线性子空间。用投影分解定理可找到$v_n\in E_n, v_n\in E_{n-1}^{\perp}$，且$\|v_n\|=1$。直接计算不难推得$(I-\lambda_nT)E_n\subset E_{n-1}$。
若$\{\lambda_n\}$是可列有界集，则$\{T\lambda_nv_n\}$存在收敛子序列，不妨设$\{T\lambda_nv_n\}$为Cauchy序列。当$n>m$时，从

$$T(\lambda_nv_n-\lambda_mv_m)=v_n-((v_n-T\lambda_nv_n)+\lambda_mTv_m)$$

可得

$$\begin{aligned}&\|T\lambda_nv_n-T\lambda_mv_m\|^2\\&=\|v_n\|^2+\|(v_n-T\lambda_nv_n)+\lambda_mTv_m\|^2\geqslant 1.\end{aligned}$$

这和$\{T\lambda_n v_n\}$是 Cauchy 序列相矛盾。故$\{\lambda_n\}$没有有限聚点，即 Λ 是复平面 C^1 上的离散集。

证毕

附录 B　抽象函数

我们将介绍抽象函数的概念和某些简单的性质。读者将会看到这些结果均是通常函数的概念和性质的直接拓广。

设 B 是 Banach 空间，J 是 R^1 中的开区间 $T_0<t<T_1$。映照

$$f: J \ni t \longmapsto f(t) \in B$$

称为**定义在 J 上取值于 Banach 空间 B 的抽象函数**。当 B 是复平面 C^1 时，f 就是常义的复值函数。因为 B 和 R^1 均有线性拓扑结构，我们可以自然引进连续和导数的概念。设 $t_0\in(T_0, T_1)$，若当 $|t-t_0|\to 0$ 时，有 $\|f(t)-f(t_0)\|\to 0$，则我们就说 $f(t)$ 在 t_0 点**连续**；若 f 在 (T_0, T_1) 上点点连续，则称 f 是 J 上的**连续函数**，记为 $f\in C(J,B)$。又若存在 $x\in B$，使

$$\left\|\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}-x\right\|\to 0 \quad (\text{当 } h\to 0),$$

则称 f 在 t_0 点**可导**，且导数 $f'(t_0)=x$。如果 $f'(t)\in C(J,B)$，那么我们就称 f 在 J 上**一次连续可微**，记为 $f(t)\in C^1(J,B)$。以此类推，可定义 k 次连续可微和光滑的概念。在上述的定义中，(T_0,T_1) 可被 $[T_0, T_1)$，$(T_0, T_1]$ 或 $[T_0, T_1]$ 所代替，J 也可被 R^n 中任一开集所代替，从而也可有相应的偏导数概念。

若 $f(t)\in C([T_0, T_1],B)$，像通常函数的 Riemann 积分那样，我们可定义

$$\int_{T_0}^{T_1} f(t)dt=\lim_{\max|\Delta t_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(t_{k+1}-t_k)。 \qquad (B.1)$$

逐字逐句地重复常义下的 Riemann 积分的推理，且注意到 B 的完备性，不难证明(B.1)右端的极限是存在的，而且此极限和分割无关。同时也可导出

$$\left\|\int_{T_0}^{T_1} f(t)dt\right\| \leqslant \int_{T_0}^{T_1} \|f(t)\|dt。\qquad (B.2)$$

下面，我们设法推广 Riemann 积分的概念。为此必须引进可测的概念。设 J 是有限个不相交的可测子集 $\{E_k\}$ $(k=1,\cdots,k_0)$ 的并集，且

$$f(t)=x_k\in B，当 t\in E_k \quad (k=1,\cdots,k_0)，\qquad (B.3)$$

则我们称 $f(t)$ 为**抽象阶梯函数**。显然，抽象阶梯函数的全体构成一线性子空间。

定义 B.1 设 $f(t)$ 是定义在 J 上取值于 Banach 空间 B 的抽象函数。若存在一抽象阶梯函数列 $\{f_n(t)\}$，满足

$$\|f_n(t)-f(t)\|\to 0(n\to\infty) 在 J 中几乎处处成立。$$

则我们称 $f(t)$ 为**强可测函数**。

由 J 上抽象连续函数的性质可推得，抽象连续函数必是强可测的。又由定义 B.1 可知，强可测抽象函数 $f(t)$ 的范数 $\|f(t)\|$ 是 J 上的 Lebesgue 可测函数。对于抽象阶梯函数 $f(t)$，我们定义

$$\int_{T_0}^{T_1} f(t)dt=\sum_{k=1}^{k_0} x_k\mu(E_k)，\qquad (B.4)$$

式中 $\mu(E_k)$ 表示集合 E_k 的测度。从(B.4)立即可得

$$\left\|\int_{T_0}^{T_1} f(t)dt\right\| \leqslant \int_{T_1}^{T_0} \|f(t)\|dt. \qquad (B.5)$$

定义 B.2 设 $f(t)$ 是强可测的抽象函数，且 $\|f(t)\|\in L^1(J)$，那么我们称 $f(t)\in L^1(J, B)$。

根据定义 B.2，$\bar{J}$ 上的连续的抽象函数和抽象阶梯函数均是 $L^1(J,B)$ 中的元素。又若 $f(t)$ 在 J 上几乎处处取零值，则称 $f(t)$ 为 $L'(J,B)$ 中的零元素。

定理 B.1 存在 $L^1(J,B)\to B$ 的线性连续映照 Φ，使

(1) 当 $f(t)\in C(\bar{J},B)$ 时，$\Phi(f)=\int_{T_0}^{T_1} f(t)dt$，

(2) 当 $f(t)$为抽象阶梯函数且满足(B.3)时

$$\Phi(f)=\sum_{k=1}^{k_0}x_k\mu(E_k)。$$

$\Phi(f)$被称为抽象函数的 Bochner **积分**，记为$\int_{T_0}^{T}f(t)dt$。

证明 首先对任一抽象阶梯函数$f(t)$，如(B.4)之右端所述定义$\Phi(f)$，故(2)自然满足。现设$f(t)\in L^1(J,B)$，即$f(t)$强可测，且$\|f(t)\|$属于$L^1(J)$。由定义B.1，我们可找到一抽象阶梯函数列$\{f_n(t)\}$，使得$\|f_n(t)-f(t)\|\to 0$，$(n\to\infty)$，在J上几乎处处成立。由此，我们构造一新的抽象阶梯函数列

$$\tilde{f}_n(t)=\begin{cases} f_n(t) & 当 \quad \|f_n(t)\|\leqslant\|f(t)\|\left(1+\dfrac{1}{n}\right), \\ 0 & 当 \quad \|f_n(t)\|>\|f(t)\|\left(1+\dfrac{1}{n}\right)。\end{cases} \tag{B.6}$$

显然，$\{\tilde{f}_n(t)\}$是抽象阶梯函数列，在J上几乎处处有满足

$$\|\tilde{f}_n(t)-f(t)\|\to 0\,(n\to\infty) \tag{B.7}$$

且

$$\|\tilde{f}_n(t)\|\leqslant\|f(t)\|\left(1+\frac{1}{n}\right)。 \tag{B.8}$$

因为$\tilde{f}_n(t)-\tilde{f}_m(t)$仍是抽象阶梯函数，故按(B.4)可计算$(\tilde{f}_n(t)-\tilde{f}_m(t))$的 Bochner 积分，且从(B.5)可得

$$\begin{aligned}&\left\|\int_{T_0}^{T_1}(\tilde{f}_n(t)-\tilde{f}_m(t))dt\right\| \\ \leqslant&\int_{T_0}^{T_1}\|\tilde{f}_n(t)-\tilde{f}_m(t)\|dt \\ \leqslant&\int_{T_0}^{T_1}\|\tilde{f}_n(t)-f(t)\|dt+\int_{T_0}^{T_1}\|\tilde{f}_m(t)-f(t)\|dt。\end{aligned} \tag{B.9}$$

因(B.9)的第一个积分中的被积函数序列几乎处处趋于零，又从(B.8)可知$\|\tilde{f}_n(t)-f(t)\|\leqslant 3\|f(t)\|\in L^1(J)$，那么由 Lebesgue 控

制收敛定理可推出：当 $n\to\infty$ 时，(B.9)的第一个积分趋于零。同样可证得：当 $m\to\infty$ 时，(B.9) 第二个积分也趋于零。从而证得 $\left\{\int_{T_0}^{T_1}\tilde{f}_n(t)\,dt\right\}$ 是 B 中的Cauchy序列。由 B 的完备性，必存在一 $x\in B$ 是此序列的极限。我们定义

$$\Phi(f)=\int_{T_0}^{T_1}f(t)dt=x$$

显然，它还满足

$$\begin{aligned}&\left\|\int_{T_0}^{T_1}f(t)dt\right\|\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\left\|\int_{T_0}^{T_1}\tilde{f}_n(t)dt\right\|\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\int_{T_0}^{T_1}\|\tilde{f}_n(t)\|dt\\&=\int_{T_0}^{T_1}\|f(t)\|dt。\end{aligned}\tag{B.10}$$

现在剩下要证明的是，这样的定义和序列 $\{f_n(t)\}$ 的选取无关。若有另一抽象阶梯函数列 $\{g_n(t)\}$，也在 J 上几乎处处满足 $\|g_n(t)-f(t)\|\to0(n\to\infty)$，则按(B.6)所定义的新函数列 $\tilde{g}_n(t)$ 也在 J 上几乎处处满足

$$\|\tilde{g}_n(t)-f(t)\|\to0\quad(n\to\infty)$$

和

$$\|\tilde{g}_n(t)\|\leqslant\|f(t)\|\left(1+\frac{1}{n}\right)。$$

那么，重复前面的推理，有

$$\begin{aligned}&\left\|\int_{T_0}^{T_1}(\tilde{f}_n(t)-\tilde{g}_n(t))\,dt\right\|\\&\leqslant\int_{T_0}^{T_1}\|\tilde{f}_n(t)-\tilde{g}_n(t)\|dt\end{aligned}$$

$$\leqslant\int_{T_0}^{T_1}\|\tilde{f}_n(t)-f(t)\|dt+\int_{T_0}^{T_1}\|f(t)-\tilde{g}_n(t)\|dt,$$

当 $n\to\infty$ 时，该式右端趋于零。因此，我们证得前面所定义的积分值与序列的选取无关。

映照 Φ 满足条件(1)是明显的。事实上，若 $f(t)\in C([T_0,T_1],B)$ 令：$f_n(t)=f(t_k^*)$ 当 $t\in(t_k,\ t_{k+1})$ 时（这里 $k=1,\cdots,n$），

$$\|f(t_k^*)\|=\min_{t_k<t<t_{k+1}}\|f(t)\|,$$

且 $t_1=T_0$，$t_k=T_0+\dfrac{(k-1)}{n}(T_1-T_0)$。在 B 的拓扑下，$f_n(t)$ 点点收敛于 $f(t)$（事实上还一致收敛），且

$$\int_{T_0}^{T_1}f_n(t)dt=\sum_{k=1}^{n}f(t_k^*)(t_{k+1}-t_k)$$

这就是(B.1)中 $f(t)$ 的 Riemann 和。因此抽象连续函数 $f(t)$ 的 Bochner 积分就等于其 Riemann 积分

证毕

定理 B.2 设 G 是 Banach 空间 B_1 到 Banach 空间 B_2 的线性连续算子。若 $f(t)\in L^1(J,B)$，则 $G(f(t))\in L^1(J,B_2)$，且

$$G\int_{T_0}^{T_1}f(t)dt=\int_{T_0}^{T_1}Gf(t)dt \qquad \text{(B.11)}$$

证明 设 $f(t)\in L^1(J,B)$，那么存在抽象阶梯函数列 $\{f_n(t)\}$，满足 $\|f_n(t)-f(t)\|\to0(n\to\infty)$ 在 J 上几乎处处成立，且 $\|f_n(t)\|\leqslant\|f(t)\|\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$，由定理 B.1 知

$$\int_{T_0}^{T_1}f(t)dt=\lim_{n\to\infty}\int_{T_0}^{T_1}f_n(t)dt。$$

若 G 是 $B_1\to B_2$ 的线性连续算子，那么由抽象阶梯函数的积分定义，不难看出

$$G\int_{T_0}^{T_1}f_n(t)dt=\int_{T_0}^{T_1}Gf_n(t)dt \qquad \text{(B.12)}$$

从G的连续性即可导出

$$\lim_{n\to\infty} G\int_{T_0}^{T_1} f_n(t)dt = G\int_{T_0}^{T_1} f(t)dt。\qquad (B.13)$$

另一方面，

$$\|Gf_n(t) - Gf(t)\| \leqslant \|G\| \, \|f_n(t) - f(t)\| \to 0 (n\to\infty),$$

在J上几乎处处成立，故$Gf(t)$是强可测的，而且$\|Gf(t)\| \leqslant \|G\| \|f(t)\| \in L^1(J)$。因此我们证得$Gf(t) \in L^1(J, B_2)$。重复定理B.1的推理，就有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{T_0}^{T_1} Gf_n(t)dt = \int_{T_0}^{T_1} Gf(t)dt。\qquad (B.14)$$

结合(B.12)和(B.14)，就证得(B.11)。

证毕

注 B.1 若$f(t)\in L^1(J,B)$，定义f的范数为

$$\|f\|_{L^1(J,B)} = \int_{T_0}^{T_1} \|f(t)\|_B dt, \qquad (B.15)$$

那么我们可以证明$L^1(J,B)$是一Banach空间，且$C_c^\infty(J,B)$在$L^1(J,B)$中稠密。

注 B.2 若$f(t)$是强可测的，$\|f(t)\|_B \in L^P(J)$，$1\leqslant P<+\infty$，记这种函数的全体为$L^P(J,B)$，则它也是Banach空间，其范数为

$$\|f\|_{L^P(J,B)} = \left(\int_{T_0}^{T_1} \|f(t)\|_B^P dt\right)^{\frac{1}{P}},$$

$C_c^\infty(J,B)$按此范数在$L^P(J,B)$中也是稠密的。

在实际应用中B经常取为Sobolev空间$H^m(\Omega)$，这里Ω为R^n中具有光滑边界的开区域。以下我们将对$B=L^1(\Omega)$的情形证明注B.1的断言，而对B为一般的Banach空间的情形，证明这一断言没有任何新的困难。

定理 B.3 $L^1(J,L^1(\Omega))$在范数(B.15)下是完备的，且$C_c^\infty(Q)$

是其稠密子空间。

证明 我们先证完备性。设$\{f_n(t)\}\in L^1(J,L^1(\Omega))$是Cauchy序列。由定理B.1知，不失一般性，可设$f_n(t)$为抽象阶梯函数，我们从中选取子序列$\{f_{n_k}(t)\}$，满足

$$\int_{T_0}^{T_1}\|f_{n_k}(t)-f_m(t)\|_{L^1(\Omega)}dt\leqslant\frac{1}{2^k}\ (\text{当 } m\geqslant n_k) \qquad (B.16)$$

$(k=1,\cdots,)$记

$$S_m(t)=\sum_{k=1}^{m}\|f_{n_{k+1}}(t)-f_{n_k}(t)\|_{L^1(\Omega)},$$

那么，$S_m(t)$是J上单调增加函数列，且$S_m(t)$在J上的积分一致有界。那么根据Fatou引理，有

$$L^1(J)\ni S(t)=\lim_{m\to\infty}S_m(t)\text{，在 } J \text{ 上几乎处处成立} \qquad (B.17)$$

由$(B.17)$知，在J上，除去一零测度集合的t，存在$f(t)\in L^1(\Omega)$，使$f_{n_k}(t)\to f(t)(L^1(\Omega))$。又因为

$$\|f_{n_k}(t)\|_{L^1(\Omega)}\leqslant\|f_{n_1}(t)\|_{L^1(\Omega)}+\sum_{l=1}^{k-1}\|f_{n_{l+1}}(t)-f_{n_l}(t)\|_{L^1(\Omega)}$$

$$\leqslant\|f_{n_1}(t)\|_{L^1(\Omega)}+S(t)\quad\in L^1(J),$$

故

$$\|f(t)\|_{L^1(\Omega)}\leqslant\|f_{n_1}(t)\|_{L^1(\Omega)}+S(t)。$$

从而$f(t)\in L^1(J,L^1(\Omega))$，现在$(B.16)$中，用$f_{n_l}(t)$代$f_m(t)$，再利用Lebesgue控制收敛定理，令$n_l\to\infty$就得

$$\int_{T_0}^{T_1}\|f_{n_k}(t)-f(t)\|_{L^1(\Omega)}dt\leqslant\frac{1}{2^k}。$$

这就证得了$L^1(J,L^1(\Omega))$的完备性。

现证$C_c^\infty(Q)$在$L^1(J,L^1(\Omega))$中的稠密性。由定理B.1知：若$f(t)\in L^1(J,L^1(\Omega))$，则存在抽象阶梯函数列$\{f_n(t)\}$，满足$f_n(t)\to f(t)(L^1(J,L^1(\Omega)))$。因$f_n(t)$也是$L^1(Q)$中的元素，由$C_c^\infty(Q)$在$L^1(Q)$中的稠密性，人们可找到一函数列$\{\tilde{f}_n(t)\}\in C_c^\infty(Q)$，使

$$\frac{1}{n} \geqslant \|\tilde{f}_n(t) - f_n(t)\|_{L^1(Q)} = \|\tilde{f}_n(t) - f_n(t)\|_{L^1(J, L^1(\Omega))}.$$

从而 $\tilde{f}_n(t) \to f_1(t) \quad (L^1(J, L^1(\Omega)))$。

证毕

注 B.3 因为在 $C_c^\infty(Q)$ 上，$L^1(J, L^1(\Omega))$ 的范数和 $L^1(Q)$ 的范数相等，而 $C_c^\infty(Q)$ 在这两个空间中均稠密，故我们可以认为这两个空间是相同的，这里，实际上是指 $L^1(J, L^1(\Omega))$ 与 $L^1(Q)$ 分别关于它们零元素集合所作出的商空间是相同的。但是，应当指出，$L^1(J, L^1(\Omega))$ 中的零元素看成 $Q = J \times \Omega$ 上的函数时可能不是 Lebesgue 可测的，因此不能认为它是在 Q 上几乎处处为零的函数。而任一 $L^1(J, L^1(\Omega))$ 中的元素，在加上某个零元素后，就可成为 Q 上的 Lebesgue 可积函数。当我们把 $L^1(J, L^1(\Omega))$ 的元素说成属于 $\mathscr{D}'(Q)$ 时，都是指在上述意义下将 $L^1(J, L^1(\Omega))$ 元素看成 $L^1(Q)$ 中的元素，然后作为 $C_c^\infty(Q)$ 上的广义函数。

注 B.4 在同样意义下，我们可以把 $L^2(J, L^2(\Omega))$ 和 $L^2(Q)$ 等同起来。而且从范数表达式可知，$u(t) \in L^2(J, H^m(\Omega))$（$m$ 为非负整数）的充要条件是：$u \in L^2(Q)$，且对所有满足 $|\alpha| \leqslant m$ 的重指标 α，有 $\partial_x^\alpha u \in L^2(Q)$。

参考文献

[1] 齐民友编著：**线性偏微分算子引论（上册）**，科学出版社(1986)。

[2] 陈恕行编著：**偏微分方程概论**，高等教育出版社(1981)。

[3] J. 巴罗斯-尼托著，欧阳光中、朱学炎译：**广义函数引论**，上海科学技术出版社(1981)。

[4] R. A. 阿达姆斯著，叶其孝等译：**索伯列夫空间**，

人民教育出版社(198…

[5] F. 特勒弗斯著，陆柱家译：**基本线性偏微分方程**，上海科学技术出版社(1982)。

[6] J. L. 里翁斯著，李大潜译：**偏微分方程的边值问题**，上海科学技术出版社(1980)。

[7] M. 谢克特著，叶其孝译，齐民友校：**偏微分方程的现代方法**，科学出版社(1983)。

[8] 关肇直著：**泛函分析讲义**，高等教育出版社(1958)。

[9] 吉田耕作著，吴元恺等译：**泛函分析**，人民教育出版社(1980)。

[10] F. 黎茨、B. 塞克佛尔维-纳吉著，庄万等译：**泛函分析讲义（第二卷）**，科学出版社(1980)。

[11] L. Bers, F. John & M. Schechter, Partial Differential Equations, Wiley (1964).

[12] J. Chazarain & A. Piriou, Introduction to the Theory of Linear Partial Differential Equations, North-Holland Pubrishing Company (1982).

[13] D. Gilbarg & N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Second edition, Springer-Verlag (1983).

[14] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators I, Springer-Verlag(1983).

[15] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag (1983).

[16] R. E. Showalter, Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations, Pitman (1977).